17.07.14

בס"ד

שיטות נומריות - תרגול 2

ניתוח שגיאות: מספר מצב (condition number)

נתונות מערכות המשוואות:

$$I \begin{cases} x+y=2 \\ x+1.01y=2.01 \end{cases}$$

$$II \begin{cases} x+y=2 \\ x+1.01y=2.02 \end{cases}$$

הפתרונות: $I: x=y=1$

$II: x=0, y=2$

המערכות דומות

ההבדל היחיד הוא בצד ימין במשוואות.

הפתרונות שונים מאוד.

נסמן: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix}$

$$b_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 2.01 \end{bmatrix}$$

$$b_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 2.02 \end{bmatrix}$$

הבעיה: למצוא x כך ש $Ax=b_1$

קיימת אי-וודאות לגבי ערכו של b_1.

מסקנה: אי-אפשר למצוא ערך מקורב של x כי אם במקום b_1 נציב וקטור אחר קרוב של b_1, למשל b_2 אז נקבל פתרון שונה לחלוטין מהמקורי.

לבעיות כאלו יש שם: ill-condition "לא מותנית היטב".

לבעיות שבהן: שגיאה קטנה בקלט (b בבעיה הנ"ל) תוביל רק לשגיאה קטנה בפלט (x בנ"ל) קוראים: Well-conditioned

מס' מוצבות הבעיה.

נגדיר מס' מצב של פונקציה.

תהי $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

יהי $x \in \mathbb{R}^n$ - קלט

נסמן $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ - פלט

מס' המצב של f בנק' x הוא:

$$C(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|}{\left|\frac{h}{x}\right|} = \lim_{h\to 0} \frac{\delta f(x)}{\delta x}$$

יחס השגיאות היחסית בין הקלט והפלט עבור שגיאה קטנה מאוד.

*אם f גזירה

$$C(x) = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \cdot \left|\frac{x}{f(x)}\right| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right|$$

וגם אם $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

מסקנה: אם C גדול מאוד אז שגיאה קטנה בקלט יכולה להוביל לשגיאה גדולה בפלט, כי בסביבת x

$$\delta f(x) \approx C(x) \cdot \delta x$$

ואילו $C = 1$ אז $\delta f \approx \delta x$

$\Leftarrow$ גודל השגיאה בפלט הוא כגודל השגיאה בקלט

אם $f \equiv 1$ קבועה, לכל h, $f(x+h) - f(x) = 0$

$\Rightarrow C(x) = 0$

$\Rightarrow \delta f = 0$

לכל שגיאה בקלט, הפלט מדויק.

הערה

אם $C>>1$ אזי הבעיה של לחשב את $f(x)$ היא לא מותנית היטב.

תרגיל: נתונות שתי פונקציות:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad f_2(x) = \frac{(3x^4-10)^2}{12}$$

נק' החיתוך שלהן היא $x=\sqrt{2}$

נרצה לחשב את ערך ה-y של נק' החיתוך.
$\sqrt{2}$ לא מיוצג בדיוק במחשב שלי, ויש רק ערך מקורב של המספר.

נחשב את $C(\sqrt{2})$ של שתי הפונקציות ונבחר בפונקציה בעלת c הקטן יותר.

$$C_i(x) = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot x\right| \qquad i=1,2$$

C_i מספר המצב של f_i.

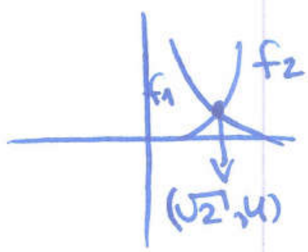
$$C_1(x) = \left|\frac{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}{\frac{1}{x^2+1}}\cdot x\right| = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$C_2(x) = \left|\frac{2x^3(3x^4-10)}{\frac{(3x^4-10)^2}{12}}\cdot x\right| = \frac{24x^4}{|3x^4-10|}$$

נציב $\sqrt{2}$:

$$C_1(\sqrt{2}) = \frac{2\cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$C_2(\sqrt{2}) = 24\cdot\frac{2^2}{3\cdot 2^2-10} = 48$$



$$\Leftarrow \quad C_1(\sqrt{2}) < C_2(\sqrt{2})$$

$\Leftarrow$ עדיף להשתמש ב $F1$.

סע׳ ג

נתונה $f = \frac{1}{1-x}$

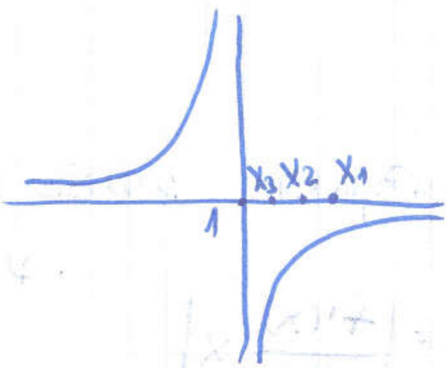
תשובות מספר המצב לשאלה בנק׳:

$x_0 = 2$

$x_1 = 1.1$

$x_2 = 1.01$

$x_3 = 1.0001$



$$C(x) = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \right| = \left| \frac{-\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} x \right| = \left| \frac{x}{1-x} \right|$$

$C(2) = 2$

$C(1.1) = \frac{1.1}{0.1} = 11$

$C(1.01) = 101$

$C(x_3) = 10001$

בס"ד

שגיאות עיגול

ידוע שחיבור הוא אסוציאטיבי

האם חיבור של מספרים עם עיגול הוא קומוטטיבי?

האם $fl(fl(x+y)+z) = fl(x+fl(y+z))$

תשובה: לא.

$$\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{10^6 \text{ מחוברים}} + 10^6$$

נניח שהמספרים של' מיוצגים בדיוק של 5 ספרות משמעותיות (מנטיסה של 5 ספרות).

$$[1+[1+[\dots+[1+10^6]]] = 10^6$$

$$1+10^6 = 1000001$$

$$fl_6(1+10^6) = 1000000$$

$$[1+1+1+\dots\dots] + 10^6 = 2\cdot 10^6$$

$$fl_5(1+1) = 2$$

$$fl_5(2+1) = 3$$

$\vdots$

$$fl_6(99{,}999 + 1) = 100{,}000$$

$$fl_6(999{,}999) = 9.99999\cdot 10^5$$

נק' צפה מספר מיוצג בתקן float (single / double)

המספר מיוצג ע"י 32 ביטים

(single): $b_{31} \dots b_2 b_1 b_0$

$$fl(x) = (-1)^{b_{31}} \cdot 2^{e-127} \cdot 1.b_{22}\dots b_0$$

$$e = b_{30}\dots b_{25}\, b_{24}\, b_{23}$$

בסיס 2

מספר מיוצג בדיוק של m ספרות משמעותיות

$$fl(x) = \sigma(x) \cdot 10^e \cdot \underbrace{d_m d_{m-1} d_{m-2} \dots d_1}_{\text{מנטיסה}}$$

$$0 \le d_i \le 9$$

בסיס 10

$$fl(x) = 10^e \underbrace{d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1}_{\text{6 ספרות}}\dots$$

$$fl(10^6) = 10^6 \cdot 1.00000$$

$$fl(10^6+1) = 10^6 \cdot \underbrace{1.0000}_{\text{6 ספרות}}\cancel{1}$$

$$fl(10^6) = fl(10^6+1)$$

$$[[1+1+\dots+1]+10^6]$$

$$fl(1+1) = 2 \cdot 10^0$$

$$fl(999{,}999) = 10^5 \cdot \underbrace{9.99999}_{\text{6 ספרות}}$$

$$fl(999{,}999+1) = 10^6 \cdot 1.00000$$

$$fl(10^6+10^6)=10^6\cdot 2$$

באופן כללי: עדיף לסכם את המחוברים בסכום כך שהקטנים ביותר מופיעים ראשונים, כאשר מבצעים חיבור עם שגיאה.

<u>הוכחה</u>: יהיה $\sum_{i=1}^{n} a_i$. נניח שבעת ביצוע הסכום ה i' נוספת שגיאה יחסית ε_i.

$$\underbrace{x \oplus y}_{\text{קירוב}} = \underbrace{(x+y)}_{\text{מדויק}}\cdot(1+\varepsilon)$$

$$((a_1 \oplus a_2)\oplus a_3)\oplus \_\_\_$$

נסמן

$$S_2 = a_1 \oplus a_2 = (a_1+a_2)(1+\varepsilon_2)$$
$$S_3 = S_2 \oplus a_3$$
$$S_4 = S_3 \oplus a_4$$
$$\vdots$$

$$S_3 = ((a_1+a_2)(1+\varepsilon_2)+a_3)(1+\varepsilon_3)$$
$$=(a_1+a_2)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)+a_3(1+\varepsilon_3)$$

באינדוקציה:

$$\begin{aligned}S_n = (a_1+a_2)\cdot(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\_\_\_(1+\varepsilon_n) &+\\ + a_3\cdot (1+\varepsilon_3)\_\_\_(1+\varepsilon_n) &+\\ + a_4\cdot (1+\varepsilon_4)\_\_\_(1+\varepsilon_n) &+\\ + a_n\cdot(1+\varepsilon_n)&\end{aligned}$$

נסמן $S=\sum_{i=1}^{n} a_i$

ונחשב את $S-S_n$:

המשך

$$S - S_n = -a_1(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) - a_2(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) - a_3(\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n) - \ldots - a_n\varepsilon_n + o(\varepsilon_i \varepsilon_j)$$

לכיון