תרגול 9 – ערכים עצמיים

ערכים עצמיים

תרגיל

תהי:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מצא ע"ע מקסימלי ואת הו"ע.

פתרון:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שלב ראשון:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לפי נורמת אינסוף, הנורמה של ווקטור הפתרונות היא 5.

$$x_1 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.2 \end{pmatrix}}$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

שלב שני:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\max(4.6,1,0.2)} \cdot \begin{pmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{pmatrix}$$

שלב שלישי:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.217 \\ 0.4775 \\ -0.0435 \end{pmatrix}$$

$$x_3=\frac{1}{4.217}\cdot\begin{pmatrix}4.217\\0.4775\\-0.0435\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0.1132\\-0.0103\end{pmatrix}$$

שלב רביעי:

$$\begin{pmatrix}4&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0.1132\\-0.0103\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.1132\\0.2161\\-0.0103\end{pmatrix}$$

$$x_4=\frac{1}{4.1132}\cdot\begin{pmatrix}4.1132\\0.2161\\-0.0103\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0.0525\\0.0025\end{pmatrix}$$

.

.

.

$$\mathrm{x_k}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\lambda=\frac{||\mathrm{Ax_k}||_\infty}{||\mathrm{x_k}|\quad|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}4\\0\\0\end{vmatrix}\right\|}{\left\|\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\right\|}=4$$

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{k}}=4}$$

היתרונות של *PM*:

תמיד מתכנס אם יש ע"ע ממשיים.

החסרונות של *PM*:

מקבלים רק את הע"ע הגדול ביותר.

כדי למצוא את הע"ע המינימלי של A נחשב את הע"ע של $\mathrm{A^{-1}}$, נסמנו ב-M.

$$\lambda=\frac{1}{\mathrm{M}}$$

דוגמה:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4&4&2\\0&4&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

נתון: $\mathrm{x_0}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{A^{-1}}=\begin{pmatrix}\frac14&-\frac14&-\frac18\\0&\frac14&-\frac18\\0&0&\frac12\end{pmatrix}$.

שלב ראשון:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נוציא חצי כגורם משותף מהווקטור שקיבלנו.

שלב שני:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נוציא שוב חצי כגורם משותף.

ולכן:

$$\mathrm{M} = \alpha_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda_{\mathrm{minimum}} = 2 = \frac{1}{\mathrm{M}}$$

:Shifted PM

אם ידוע לנו ע"ע של A ניתן למצוא לפחות עוד ע"ע אחד ע"י טכניקת הזזה.
נוריד מהמטריצה $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ ועל B נבצע PM (כמו שעשינו בדוגמה לעיל), ונמצא עבור B את הע"ע הגדול ביותר בערכו המוחלט ונסמנו M.

$$\boxed{\lambda_2(\mathrm{A}) = \underbrace{\mathrm{M}}_{\text{מתוך B ע"י PM}} + \underbrace{\lambda_1}_{\text{הע"ע הגדול של A}}}$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאנו ש$\lambda_1 = 4$ בתרגיל הראשון (עמוד 1) עבור הניחוש $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נמצא עוד ע"ע עבור A :

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} - 4 \cdot \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

עם הניחוש לעיל.

שלב ראשון:

$$x_1 = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

שלב שני:

$$x_2 = B \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן ניתן להסיק ש $M = -5$.

נציב בחזרה כדי לקבל את הע"ע של המטריצה המקורית (A):

$$\boxed{\lambda_2(A) = -5 + \lambda_1 = -5 + 4 = -1}$$

שיטת ניוטון רפסון (למקרה רב מימדי)

$$\vec{F} \underbrace{=}_{\text{הוקטור של}} \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = \overrightarrow{x_n} - J^{-1}(\overrightarrow{x_n}) \cdot \overrightarrow{F(x_n)}$$

דוגמה

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ x^2 + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_1(x, y) = 4x^2 - y^2 + 2$$

$$f_2(x, y) = x^2 + 4y - 6$$

נשתמש בהגדרה של מטריצת יעקובי לעיל (J) ונקבל לאחר הצבה של הפונקציות:

$$J=\begin{pmatrix}8x & -2y\\ 2x & 4\end{pmatrix}, J^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\underbrace{32x+4xy}_{\text{הדטרמיננטה}}}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2y\\ -2x & 8x\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{40}\cdot\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.1 & -0.1\\ -0.05 & 0.2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix}\Bigg|_{\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

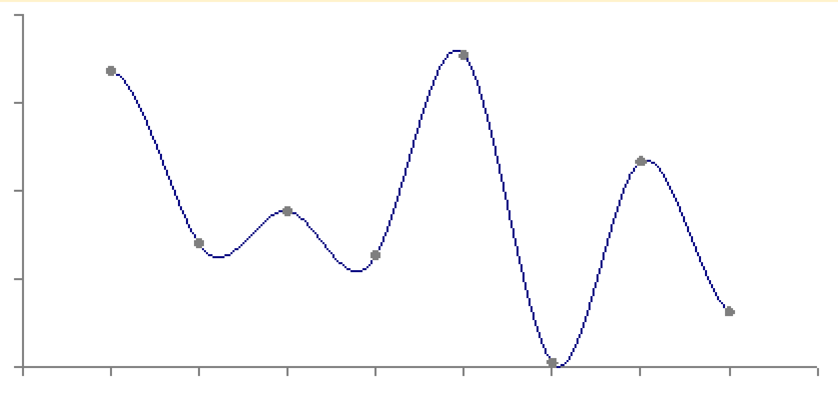
$$\overrightarrow{x_{n+1}}=\overrightarrow{x_n}-J^{-1}\cdot(x_n)\ \cdot\overrightarrow{f(x_n)}$$

$$\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_0}-J^{-1}\cdot(\overrightarrow{x_0})\cdot f(x_0)$$

$$x_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0.1 & -0.1\\ -0.05 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5\\ 1.5\end{pmatrix}$$

אינטרפולציה

המטרה:
למצוא פולינום המייצג בדייקנות מרבית התנהגות של פונקציה f כלשהי.



נתונות נקודות בסיס (נקודות דגימה).

$$(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$$

כדי שהפונקציה תתנהג כמו f בנקודות שאנחנו רוצים, נדרוש לכל נקודה מהנקודות לעיל: $f(x_i)=y_i$.

במילים פשוטות, הפולינום שלנו יעבור בכל נקודות הדגימה.

אינטרפולציה לפי פונקציית בסיס:

$x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$ נקודות דגימה, אז נגיד שדרגת פולינום האינטרפולציה לפי נקודות דגימה אלו היא n.

תרגיל:

נתונות הפונקציות הבסיסיות הבאות:

$$\varphi_1(x)=1$$

$$\varphi_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$
$$\varphi_3(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

השתמש באינטרפולציה ומצא את הפולינום העובר דרך $(0,0),(1,1),(2,4)$ בעזרת פונקציות הבסיס הנתונות.

פתרון:

$$f(x) = c_0\cdot 1 + c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) + c_2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

$$0 = f(0) = c_0\cdot 1 + c_1\cdot 0 + c_2\cdot 1$$
$$1 = f(1) = c_0\cdot 1 + c_1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$4 = f(2) = c_0\cdot 1 + c_1\cdot\sin(\pi) + c_2\cdot\cos(\pi)$$

נפתור את שלוש המשוואות (ניתן בעזרת הצבה או פתרון של מטריצת המקדמים) ונקבל:

$$c_0 = 2, c_1 = -1, c_2 = -2$$

נציב בחזרה את המקדמים שקיבלנו במשוואה המקורית ונקבל:

$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

חסרונות השיטה:

- ההופכית קשה לחישוב
- מספר מצב גבוה

הגדרה:

אינטרפולציה באמצעות $n+1$ פונקציות בסיס שהן פולינומים ממעלה בין 0 ל-n נקראת <u>אינטרפולציה פולינומית</u>:

$$\underbrace{p_{\underbrace{N}_{\text{דרגת הפולינם}}}(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\cdot l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}\left(\frac{(x-x_j)}{x_i-x_j}\right)}_{\text{משקולת לגראנג'}}$$

יוצא ש:

$$l_i(x) = \delta = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i\neq j \end{cases}$$

הערות:

- מספר פונקציות ה l_i = מספר נקודות הדגימה
- $l(x)$ היא פונקציה של x.
- $\underbrace{N}_{\text{דרגת הפולינום}} = \underbrace{n}_{\text{יש לכל היותר n+1 פונקציות}} - 1$

דוגמה:

נתונות הנקודות $\underbrace{(2,2)}_{(x_2,y_2)}$, $\underbrace{(1,1)}_{(x_1,y_1)}$, $\underbrace{(0,0)}_{(x_0,y_0)}$.
n = מספר הדגימה.

$$l_0 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i=0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \cdots = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

$$l_1 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i=1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \cdots = \left(\frac{x^2 - 2x}{-1}\right)$$

$$l_2 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i=2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \cdots = \left(\frac{x^2 - x}{2}\right)$$

$$p_2(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1 + f(x_2) \cdot l_2$$

$$p_2(x) = 0 \cdot l_0(x) + 1 \cdot \left(\frac{x(x-2)}{-1}\right) + 2 \cdot \left(\frac{x(x-1)}{2}\right) = x$$

הערה:

אם $f(x_i) = 0$ אז חישוב $l_i(x)$ מיותר (כי זה מתאפס)