פתרון תרגיל 5

14 בספטמבר 2017

1. מצאו את עוצמת הקבוצות הבאות:

א. קבוצת כל הקטעים במישור $\mathbb{R}^2$ המאונכים לציר ה־x. (קטע הוא הקו הישר המחבר בין שתי נקודות שונות).

ב. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01.

ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00.

ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00 או את הרצף 11.

ה. $\{f : \mathbb{N} \to \{0,1,2\} | \forall n \in \mathbb{N} f(n) \neq f(n+1)\}$ כלומר הסדרות הטרינאריות (סדרות מ־$0,1,2$) שאין בהן זוג איברים עוקבים שווים.

<u>פתרון:</u>

א. נשים לב שקבוצה זו היא הקבוצה הבאה (נסמנה ב־A):

$$A = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) | x_1 = x_2 \wedge y_1 \neq y_2\}$$

ולכן, נקבל

$$|A| \leq \aleph^4 = \aleph$$

בנוסף, נשים לב שיש $B \subseteq A$ (תת קבוצה של קטעים) מעוצמה $\aleph$: והיא:

$$B = \{((0,0),(0,y)) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) | y \neq 0\}$$

קל לראות ש־$|B| = \aleph$, כי נשלח כל ישר מ־B ל־y, וזו פונקציה חח"ע ועל ל־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$. לכן נקבל:

$$|A| \geq |B| = \aleph$$

לפי ק.ש.ב. נקבל

$$|A| = \aleph$$

ב. נסמן את הקבוצה ב־A. נשים לב שאם יש 0 בסדרה, אז אחריו באים רק אפסים. נגדיר פונקציה $f : A \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ע"י:

$$f(a_n) = \begin{cases} 0 & \forall n : a_n = 1 \\ k & a_k = 0 \wedge \forall n < k : a_n = 1 \end{cases}$$

במילים: את הסדרה שהיא רק אחדות נשלח לאפס, וכל סדרה אחרת נשלח למקום הראשון שבו מופיע אפס (למשל, הסדרה של רק אפסים נשלחת ל־1, הסדרה של אחד ואז אפסים ל־2 וכך הלאה). נראה חח"ע ועל:

חח"ע: נניח $f(a_n) = f(b_n)$. אם $f(a_n) = f(b_n) = 0$ אז שתיהן סדרות רק של אחדות ולכן שוות. אחרת נסמן $f(a_n) = f(b_n) = k \in \mathbb{N}$, אזי נקבל, לפי הגדרת הפונקציה, ש:

$$\forall n < k : a_n = b_n = 1$$

$$\wedge$$

$$a_k = b_k = 0$$

ובנוסף, כיון שאחרי אפס אסור שיופיע 1 נקבל

$$\forall n > k : a_n = b_n = 0$$

ולכן הסדרות שוות כלומר, $a_n = b_n$.

על: יהי $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. אם $k = 0$ אז הסדרה שכולה אחדות היא המקור. אם $k \in \mathbb{N}$ אז המקור הוא הסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

ג. שוב נסמן את הקבוצה ב־A. נשים לב ש־ $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ולכן $|A| \leq 2^{\aleph_0} = \aleph$. בנוסף, נתבונן בתת הקבוצה $B \subseteq A$ הבאה:

$$B = \{a_n \in A | \forall n = 2k-1 : a_n = 1\}$$

כלומר קבוצת הסדרות מ־A שבמקומות האי־זוגיים יש 1. מה עוצמתה? נשים לב שכעת אין לנו שום תנאי על הזוגיים (נסמנם $2\mathbb{N}$), ולכן זה כמו $\{0,1\}^{2\mathbb{N}}$. פורמלית:

נגדיר פונקציה $f:\{0,1\}^{2\mathbb{N}}\to B$ ע"י: לכל $g:2\mathbb{N}\to\{0,1\}$ נגדיר את $f(g)=a_n$ עבור הסדרה הבאה:

$$a_n=\begin{cases}1 & n=2k-1\\ g(n) & n\in 2\mathbb{N}\end{cases}$$

זו פונקציה חח"ע ועל.

חח"ע: אם יש לנו $g\neq h$ לכל יש מספר זוגי n עבורו $g(n)\neq h(n)$ ולכן גם הסדרות שמתאימות להם שונות באיבר זה.

על: תהי $b_n\in B$. המקור שלה יהיה הפונקציה $g:2\mathbb{N}\to\{0,1)$ המוגדרת לפי:

$$\forall n=2k: g(n)=b_n$$

ד. אחרי אפס בא אחד ואחרי אחד בא אפס, לכן יש רק 2 כאלה: זו שמתחילה באפס וזו שמתחילה באחד.

ה. בדומה לסעיף ג נקבע את המקומות האי־זוגיים להיות 2, לכן בשאר המקומות אנחנו חופשיים על $0,1$ ולכן זה מעוצמה א.

2. מצאו את עוצמת תתי הקבוצות הבאות של $P(\mathbb{N})$:
   א. $F=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\wedge|X^c|=\aleph_0\}$.
   ב. $K=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\wedge\forall x,y\in X:(x\neq y\Rightarrow|x-y|>17)\}$.
   ג. $L=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\wedge\forall x,y\in X:18|(x-y)\}$.

פתרון:

א. ראינו ש $A=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\}$ (אוסף תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$ האינסופיות) היא מעוצמה א. נסמן $I=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\wedge|X^c|<\aleph_0\}$. נקבל $A=F\cup I$ והאיחוד הוא זר. לכן נראה ש־$|I|=\aleph_0$, ונקבל (בדומה לתרגיל שעשינו בכיתה ובדומה למה שעשיתם בהרצאה על $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|$) ש־א $=|F|$.

ראינו שאוסף תתי הקבוצות הסופיות של הטבעיים $B=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|<\aleph_0\}$ מקיים $|B|=\aleph_0$. נגדיר פונקציה $f:I\to B$ ע"י: לכל $X\in I$

$$f(X)=X^c$$

קל לראות שזו פונקציה חח"ע (אם המשלימים שווים אז גם הקבוצות עצמן) ועל, כי המקור הוא המשלים. מש"ל.

ב+ג. נשים לב ש־ $L\subseteq K\subseteq P(\mathbb{N})$, לכן אם נראה ש־א $\leq|L|$ נקבל, לפי ק.ש.ב. $|L|=|K|=$ א.

ואכן, ניקח תת קבוצה $M\subseteq L$ המוגדרת לפי

$$M=\{X\subseteq 18\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\}$$

ולכן, כמו שאוסף תתי הקבוצות האינסופיות של הטבעיים מעוצמה $\aleph$, כך גם אוסף תתי הקבוצות האינסופיות של $18\mathbb{N}$ (אוסף המספרים המתחלקים ב־18) מעוצמה $\aleph$ וסיימנו.

3. עבור כל אחד מהביטויים קבעו את עוצמתו (מתוך $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}, 2^{2^{\aleph}}$):
א. $(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0}$.
ב. $\aleph \cdot (5^{\aleph} + \aleph_0^{\aleph_0})$.
ג. $\aleph \cdot \aleph_0^{\aleph_0^{\aleph}+\aleph}$.

פתרון:

א. $(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

ב. $\aleph \cdot (5^{\aleph} + \aleph_0^{\aleph_0}) = \aleph \cdot (2^{\aleph} + 2^{\aleph_0}) = \aleph \cdot 2^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

ג. $\aleph \cdot \aleph_0^{\aleph_0^{\aleph}+\aleph} = \aleph \cdot \aleph_0^{2^{\aleph}+\aleph} = \aleph \cdot \aleph_0^{2^{\aleph}} = \aleph \cdot 2^{2^{\aleph}} = 2^{2^{\aleph}}$.

4. א. הוכיחו שלכל קבוצה A קיימת פונקציה חח"ע $f : A^A \to P(A \times A)$.
ב. הסיקו שאם A קבוצה אינסופית מעוצמה α אז $\alpha^{\alpha} = 2^{\alpha}$.

פתרון:

א. לכל $g \in A^A$ נגדיר

$$f(g) = \{(a,b) \in A \times A | g(a) = b\}$$

היא חח"ע כי אם $h \neq g$ אז יש $a \in A$ כך ש $b = g(a) \neq h(a) = c$, ולכן $(a,b) \in f(g) \wedge (a,b) \notin f(h)$ ולכן $f(g) \neq f(h)$ כדרוש.

ב. ראינו ש־ $|A \times A| = |A|$ עבור A אינסופית. וכמו כן $|P(X)| = 2^{|X|}$ ולכן אם $\alpha = A$, אז $|P(A \times A)| = 2^{\alpha}$ ובנוסף לפי תרגיל מהכיתה $2^{\alpha} \leq \alpha^{\alpha}$ ולפי סעיף קודם נקבל

$$\alpha^{\alpha} = |A^A| \leq |P(A \times A)| = 2^{\alpha}$$

ולפי ק.ש.ב. נקבל שיוויון.

5. על הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ נגדיר יחס $\sim$ באופן הבא: לכל $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$f \sim g \iff \forall x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$$

א. הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.
ב. תהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. חשבו את $|[f]_{\sim}|$.
ג. חשבו את $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim\right|$.

פתרון:

א. רפלקסיביות: לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־$f(x)-f(x)=0\in\mathbb{Z}$.

סימטריות: נניח $g\sim f$, לכן לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$, ולכן גם $-(f(x)-g(x))=g(x)-f(x)\in\mathbb{Z}$. ולכן $g\sim f$.

טרנזיטיביות: נניח $f\sim g\wedge g\sim h$, לכן $f(x)-g(x)=a\in\mathbb{Z}\wedge g(x)-h(x)=b\in\mathbb{Z}$, ולכן:

$$f(x)-h(x)=f(x)-g(x)+g(x)-h(x)=a-b\in\mathbb{Z}$$

ב. תהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. נראה ש־

$$|[f]_{\sim}|=|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}|=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$$

נגדיר פונקציה $F:[f]_{\sim}\to\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ ע"י: לכל $g\in[f]_{\sim}$:

$$F(g)=f-g$$

כלומר נשלח את הפונקציה g לפונקציה $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, כיון ש־ $g\sim f$ נקבל שזה אכן נשלח לתוך $\mathbb{Z}$. נראה חח"ע ועל:

חח"ע: נניח $F(g)=F(h)$ כלומר $\forall x\in\mathbb{R}:f(x)-g(x)=f(x)-h(x)$, ולכן $g(x)=h(x)$.

על: תהי $h:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$. צריך למצוא לה מקור. כלומר צריך למצוא פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$\forall x\in\mathbb{R}:F(g)(x)=f(x)-g(x)=h(x)$, וניקח את הפונקציה $f-h$.

ג. נוכיח שזה יוצא $2^{\aleph}$. נרצה לבנות פונקציה $F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim\to[0,1)^{\mathbb{R}}$ חח"ע ועל. ניזכר בפונקציית הערך השלם $r:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $r(x)=\lfloor x\rfloor$. כעת נגדיר לכל $[f]_{\sim}\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim$

$$F([f]_{\sim})=f-\lfloor f\rfloor$$

נראה שהיא מוגדרת היטב על קבוצת המנה. כלומר שאם $g\sim f$ אז $f-\lfloor f\rfloor=g-\lfloor g\rfloor$, ואכן נתון ש־$f-g\in\mathbb{Z}$, ולכן נקבל ש־$f-g=\lfloor f\rfloor-\lfloor g\rfloor$ וקיבלנו הדרוש.

חח"ע: נניח $F([f]_{\sim})=F([g]_{\sim})$ כלומר $f-\lfloor f\rfloor=g-\lfloor g\rfloor$, ולכן $f-g=\lfloor f\rfloor-\lfloor g\rfloor\in\mathbb{Z}$ ולכן $f\sim g$ ולכן $[f]_{\sim}=[g]_{\sim}$.

על: תהי $h:\mathbb{R}\to[0,1)$, צריך למצוא לה מקור. כלומר למצוא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$F([f]_{\sim})=f-\lfloor f\rfloor=h$. ניקח את h עצמה ונסתכל עליה כפונקציה מהממשיים לעצמם, וכיון ש־$\lfloor h\rfloor=0$ נקבל הדרוש.

6. א. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?

ב. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?

ג. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם כובעים לכבוד מסיבת פורים: 7 כובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו־5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יקבל בדיוק כובע אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

ד. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות המחשב תהיינה מורכבות מ־6 ספרות (מתוך 10 אפשריות) ו־12 אותיות (מתוך 52 אותיות האנגלית, גדולות וקטנות). כמה סיסמאות ניתן להרכיב?

<u>פתרון:</u>

א. מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר במעגל. כלומר יש $\binom{16}{6}5!9!$ אפשרויות להושבת האנשים.

הערה: שימו לב שניתן לבחור תחילה את 10 האנשים שישבו בשולחן השני, והתוצאה זהה כי $\binom{16}{10}=\binom{16}{6}$.

ב.מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר בשורה. כלומר יש $\binom{16}{6}5!10!$ אפשרויות להושבת האנשים.

ג. תחילה נבחר 7 סטודנטים מתוך 30 וניתן להם כובעי ליצן, ויש $\binom{30}{7}$ אפשרויות כאלו. אחר כך, מתוך $30-7=23$ הסטודנטים הנותרים נבחר 18 תלמידים שיחבשו מצנפות שינה, ויש $\binom{23}{18}$ אפשרויות כאלו. שאר הסטודנטים מוכרחים לקבל סומבררוס, הרי $\binom{5}{5}=1$. בסך הכל יש $\binom{30}{7}\binom{23}{18}\binom{5}{5}=\frac{30!}{7!\cdot 18!\cdot 5!}$ דרכים לבחירה. שימו לב שהתשובה $\frac{30!}{7!18!5!}$ לא תלויה בסדר של בחירת קבוצות הכובעים. תרגיל זה הוא דוגמה למקדם המולטינומי. הסימון של מקדם זה הוא $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ כאשר $n=k_1+k_2+\cdots+k_m$, והוא סופר את מספר הדרכים לחלק n עצמים שונים (אצלנו 30 הסטודנטים) ל־m קבוצות (אצלנו שלושת סוגי הכובעים), כך שבקבוצה הראשונה יש k_1 עצמים, בקבוצה השנייה יש k_2 עצמים וכן הלאה.

7. ועידת פרס רוצה לחלק סכום של $10,000$ ש"ח בין 10 זוכים. כמה אפשרויות עומדות לרשות הועידה אם:

א. הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים.

ב. הפרסים הם מספרים טבעיים.

ג. הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים בכפולה של 100 ש"ח.

<u>פתרון:</u>

א. השאלה שקולה למציאת מספר הפתרונות של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 10000$$

במספרים שלמים אי־שליליים. כלומר $\binom{10009}{9} = \binom{10+10000-1}{10000}$ דרכים.

ב. כאן אנו דורשים שבפתרונות למשוואה שבסעיף הקודם, יתקיים $x_i \geq 1$ לכל i. כלומר בכל תא יש לפחות כדור אחד. כלומר השאלה שקולה למספר הדרכים לחלוקה של $10000-10$ כדורים זהים לתוך 10 תאים, שהוא $\binom{9999}{9}$ דרכים.

ג. כל פיתרון של המשוואה מהסעיף הראשון, כאשר המשתנים כפולות של 100, הוא בחירה טובה, (וכל חלוקה של הפרס לכפולות של מאה היא בפרט חלוקה לשלמים אי שליליים, ולכן נמצאת בפיתרון סעיף ראשון). לכן נוכל לחלק את המשוואה לעיל ב־100, ולהגדיר משתנים חדשים $y_i = \frac{x_i}{100}$ עבור הפתרונות המתאימים שאנו יודעים שהם שלמים. לכן יש $\binom{109}{9} = \binom{10+100-1}{100}$ אפשרויות.

8. תהי A קבוצה מגודל n, ויהי R יחס סדר מלא עליה. חשבו את $|R|$.

פתרון:

ראשית היחס רפלקסיבי, ולכן לכל $a \in A$ נקבל aRa, וזה נותן לנו n איברים. בנוסף, לכל $a \neq b \in A$, בדיוק אחד מהזוגות $(a,b),(b,a)$ נמצא, ולכן צריך להוסיף את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, ויש $\binom{n}{2}$ כאלה. סה"כ:

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9. א. כמה מספרים בין 1000 ל־10000 יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?

ב. כמה מספרים בעלי n ספרות לכל היותר יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?

פתרון:

א. זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ כך ש־$x_1 \geq 1 \wedge \forall i \in \{2,3,4\} : x_i \geq 0$. לכן נסמן $y_1 = x_1 - 1, \forall i \in \{2,3,4\} : y_i = x_i$. ונוריד מהתוצאה אחד, ונקבל את מספר הפתרונות למשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$ כך ש־$\forall i : y_i \geq 0$ ולכן יש $\binom{10}{7} = \binom{4+7-1}{7}$ מספרים כאלה.

ב. נשים לב שאם יש לנו מספר עם פחות מ־n ספרות נוכל להסתכל עליו כמספר עם n ספרות שהספרות השמאליות הן 0. לכן זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = 8$ כך ש־$\forall i : x_i \geq 0$ ולכן זה בדיוק $\binom{n+7}{8} = \binom{n+8-1}{8}$.

10. א. בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

פתרון:

א. צריך ששניהם יהיו זוגיים או ששניהם יהיו אי־זוגיים. לכל אפשרות יש לנו $\binom{50}{2}$ דרכים, ולכן סה"כ

$$2 \cdot \binom{50}{2}$$

ב. כאן או ששלושתם זוגיים ($\binom{50}{3}$ דרכים), או ששניים אי־זוגיים ואחד זוגי ($50 \cdot \binom{50}{2}$ דרכים). סה"כ:

$$\binom{50}{3} + 50 \cdot \binom{50}{2}$$