תרגיל כיתה 12 – משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים

מתרגל: אדם צ'פמן

משוואות מיוחדות:

אם יש לנו משוואה $y''+ay'+by=f(x)+g(x)$ כאשר יש לנו פיתרון פרטי למשוואה $y''+ay'+by=f(x)$ ופיתרון פרטי למשוואה $y''+ay'+by=g(x)$ אז הסכום שלהם הוא פיתרון פרטי למשוואה $y''+ay'+by=f(x)+g(x)$.

דוגמא

- $y'+4y=x+3e^{x}$

פיתרון: הפיתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $y=c_1e^{-4x}+c_2$. 1 הוא לא פיתרון של המשוואה $t+4=0$ ולכן נחפש למשוואה $y'+4y=3e^{x}$ פיתרון מהצורה $y=me^{x}$.

כשמציבים מקבלים $me^{x}+4me^{x}=3e^{x}$ ולכן $m=\frac{3}{5}$.

0 הוא לא פיתרון למשוואה $t+4=0$ אך בצד ימין מופיע xe^{0x} ולא e^{0x} ולכן נחפש פיתון למשוואה $y'+4y=x$ מהצורה $y=nx+k$. כשמציבים מקבלים

$n+4(nx+k)=x$ משמע $\begin{cases} n+4k=0 \\ 4n=1 \end{cases}$ ולכן $n=\frac{1}{4}$ ו $k=-\frac{1}{16}$.

משוואות לא הומוגניות:

לא תמיד אנחנו מטפלים במשוואות מיוחדות ולפעמים גם שם אנחנו מעדיפים לבצע פעולות שטובות עבור מקרים כלליים יותר.

משוואה מסדר שני עם משתנים קבועים לא הומוגנית היא משוואה מהצורה

$$y''+ay'+by=f(x).$$

איך פותרים?

פותרים את המשוואה ההומוגנית $y''+ay'+by=0$ ומקבלים איזשהו פיתרון כללי

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

את הפיתרון הפרטי למשוואה הלא הומוגנית נחפש באופן הבא:

נציב $y=g_1(x)y_1(x)+g_2(x)y_2(x)$ במשוואה $y''+ay'+by=f(x)$ ונוסיף תנאי $g_1'(x)y_1+g_2'(x)y_2=0$. כעת,

$$\begin{aligned}y' &= g_1'(x)y_1(x)+g_1(x)y_1'(x)+g_2'(x)y_2(x)+g_2(x)y_2'(x)\\ &= g_1(x)y_1'(x)+g_2(x)y_2'(x)\end{aligned}$$

וגם $y''=g_1'(x)y_1'(x)+g_1(x)y_1''(x)+g_2'(x)y_2'(x)+g_2(x)y_2''(x)$.

כשמציבים זאת במשוואה $y''+ay'+by=f(x)$ מקבלים

$$\begin{aligned}&g_1'(x)y_1'(x)+g_1(x)y_1''(x)+g_2'(x)y_2'(x)+g_2(x)y_2''(x)\\ &+a(g_1(x)y_1'(x)+g_2(x)y_2'(x))+b(g_1(x)y_1(x)+g_2(x)y_2(x))=f(x)\end{aligned}$$

אבל $y_1''(x)+ay_1'(x)+b=0$ וגם $y_2''(x)+ay_2'(x)+b=0$ ולכן אנו נשארים עם $g_1'(x)y_1'(x)+g_2'(x)y_2'(x)=f(x)$.

משמע, כדי למצוא פיתרון פרטי למשוואה הדיפרנציאלית צריך לפתור את המערכת

$$\begin{cases}g_1'(x)y_1'(x)+g_2'(x)y_2'(x)=f(x)\\ g_1'(x)y_1(x)+g_2'(x)y_2(x)=0\end{cases}.$$

הפיתרון הכללי למשוואה הלא הומוגנית הוא

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+g_1(x)y_1(x)+g_2(x)y_2(x).$$

דוגמאות:

- $y''-7y'+6y=(x-2)e^x$.

הפיתרון למשוואה ההומוגנית הוא $y=c_1e^x+c_2e^{6x}$.

נפתור את המערכת $\begin{cases} g_1'(x)e^x+6g_2'(x)e^{6x}=(x-2)e^x \\ g_1'(x)e^x+g_2'(x)e^{6x}=0 \end{cases}$.

מחיסור המשוואות מקבלים $5g_2'(x)e^{6x}=(x-2)e^x$, ולכן

$$g_2(x)=\frac{1}{5}\int(x-2)e^{-5x}dx=-\frac{1}{25}(x-2)e^{-5x}+\frac{1}{25}\int e^{-5x}dx$$

$$=-\frac{1}{25}(x-2)e^{-5x}-\frac{1}{125}e^{-5x}=-\frac{1}{25}xe^{-5x}+\frac{9}{125}e^{-5x}$$

נציב זאת במשוואה השנייה במערכת ונקבל $g_1'(x)e^x+\frac{1}{5}(x-2)e^{-5x}e^{6x}=0$.

משמע, $g_1'(x)=-\frac{1}{5}(x-2)$ ולכן $g_1(x)=-\frac{1}{10}x^2+\frac{2}{5}x$.

הפיתרון הפרטי הוא אם כן

$$y=(-\frac{1}{10}x^2+\frac{2}{5}x)e^x+(-\frac{1}{25}xe^{-5x}+\frac{9}{125}e^{-5x})e^{6x}=(-\frac{1}{10}x^2+\frac{9}{25}x+\frac{9}{125})e^x$$

והפיתרון הכללי הוא $y=c_1e^x+c_2e^{6x}+(-\frac{1}{10}x^2+\frac{9}{25}x+\frac{9}{125})e^x$.

- $$y''+2y'+5y=\frac{2}{\sin(2x)e^{x}}$$

הפיתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $y=c_1e^{-x}\cos(2x)+c_2e^{-x}\sin(2x)$.

נפתור את המערכת

$$\begin{cases} e^{-x}(-g_1'(x)(\cos(2x)+2\sin(2x))+g_2'(x)(-\sin(2x)+2\cos(2x)))=\frac{2}{\sin(2x)e^{x}} \\ g_1'(x)e^{-x}\cos(2x)+g_2'(x)e^{-x}\sin(2x)=0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נובע כי $g_2'(x)=-g_1'(x)\cot(2x)$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל

$$e^{-x}(-g_1'(x)(\cos(2x)+2\sin(2x))-g_1'(x)\cot(2x)(-\sin(2x)+\cos(2x)))$$
$$=\frac{2}{\sin(2x)e^{x}}$$

$$e^{-x}(-g_1'(x)(\cos(2x)+2\sin(2x))+g_1'(x)(\cos(2x)-2\cos^{2}(2x)\sin^{-1}(2x)))$$
$$=\frac{2}{\sin(2x)e^{x}}$$

$$-2e^{-x}g_1'(x)\sin^{-1}(2x)=\frac{2}{\sin(2x)e^{x}}$$

משמע $g_1'(x)=-1$ ולכן $g_1(x)=-x$.

מצד שני, $-e^{-x}\cos(2x)+g_2'(x)e^{-x}\sin(2x)=0$ ולכן $\cot(2x)=g_2'(x)$ ולכן

$g_2(x)=\frac{1}{2}\ln(\sin(2x))$.

הפיתרון הפרטי אם כך הוא $y=-xe^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln(\sin(2x))e$, והפיתרון הכללי

הוא $y=c_1e^{-x}\cos(2x)+c_2e^{-x}\sin(2x)-xe^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln(\sin(2x))e$.

- $y''+4y=\frac{2}{\cos(2x)}$.

הפיתרון למשוואה ההומוגנית הוא $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$.

נפתור את המערכת $\begin{cases}-2g_1'(x)\sin(2x)+2g_2'(x)\cos(2x)=\dfrac{2}{\cos(2x)}\\ g_1'(x)\cos(2x)+g_2'(x)\sin(2x)=0\end{cases}$

אם מכפילים את המשוואה הראשונה ב $\cos(2x)$ ואת השנייה ב $\sin(2x)$ ומחברים את שתי המשוואות אז מקבלים $2g_2'(x)(\cos^2(2x)+\sin^2(2x))=2g_2'(x)=2$ ולכן

$g_2(x)=x$.

מאידך, $g_1'(x)\cos(2x)=-\sin(2x)$, ולכן $g_1(x)=\ln(\cos(x))$.

הפיתרון הפרטי הוא $y=\ln(\cos(x))\cos(2x)+x\sin(2x)$ והפיתרון הכללי הוא

$y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\ln(\cos(x))\cos(2x)+x\sin(2x)$.

- $y''+4y'=\cos(2x)$.

הפיתרון למשוואה ההומוגנית הוא $y = c_1 e^{-4x} + c_2$.

נפתור את המערכת $\begin{cases} -4e^{-4x} g_1'(x) = \cos(2x) \\ e^{-4x} g_1'(x) + g_2'(x) = 0 \end{cases}$.

מהמשוואה הראשונה נובע כי $g_1'(x) = -\frac{1}{4} e^{4x} \cos(2x)$ ולכן

$$g_1(x) = -\frac{1}{40} e^{4x} (\sin(2x) + 2\cos(2x)).$$

אם מכפילים את המשוואה השנייה ב 4 ומוסיפים לה את הראשונה מקבלים

$4g_2'(x) = \cos(2x)$. לכן $g_2(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

מכאן שהפיתרון הפרטי הוא

$$y = -\frac{1}{40} e^{4x} (\sin(2x) + 2\cos(2x)) e^{-4x} + \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{19}{40}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x)$$

והפיתרון הכללי הוא $y = c_1 e^{-4x} + c_2 + \frac{19}{40}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x)$.