

תרגיל 1-אנליזה פונקציונלית.

23 באוקטובר 2018

תזכורת: עבור קבוצות A ו B :

- נאמר ש $|A| = |B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \rightarrow B$.
- נאמר ש $|A| \leq |B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \rightarrow B$ או באופן שקול שקיימת פונקציה על $g : B \rightarrow A$.
- אם מתקיים $|A| \leq |B|$ ו $|B| \leq |A|$ אזי $|A| = |B|$.
- סכום עוצמות מוגדר על ידי $|A \times \{0\} \cup B \times \{1\}| = |A| + |B|$ (אם A ו B זרות אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$).
- כפל עוצמות מוגדר על ידי $|A \times B| = |A| |B|$.
- חזקת עוצמות מוגדרת על ידי $|\{f|f : B \rightarrow A\}| = |A|^{|B|}$ (כעוצמה של כל הפונקציות מ B ל A).
- את העוצמה של טבעיים \mathbb{N} נהוג לסמן על ידי \aleph_0 .
- אם A סופית או $|A| = \aleph_0$ נאמר ש A היא בת מניה.
- חשבון עוצמות: אם A או B אינה קבוצה סופית אזי מתקיים $|A| + |B| = |A| |B| = \max\{|A|, |B|\}$.

1. תהיינה A_1, A_2, B_1, B_2 כך ש $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$. הראו באופן מפורש, כלמר על ידי הוכחת קיום של פונקציה את השוויונות הבאים.

$$(א) |A_1| + |B_1| = |A_2| + |B_2|$$

$$(ב) |A_1| |B_1| = |A_2| |B_2|$$

$$(ג) |A_1|^{|B_1|} = |A_2|^{|B_2|}$$

2. תהי A קבוצה ותהי $P(A)$ קבוצת החזקה שלה, כאשר קבוצה חזקה היא קבוצת תתי הקבוצות של A . $P(A) = \{X|X \subseteq A\}$.

(א) לכל $B \subseteq A$ נגדיר פונקציה מאפיינת $\chi_B : A \rightarrow \{0, 1\}$ על ידי

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

הראו שהפונקציה $F : P(A) \rightarrow \{f : A \rightarrow \{0, 1\}\}$ המוגדרת על ידי

$$F(B) = \chi_B$$

הינה פונקציה חח"ע ועל.

(ב) הסיקו ש $|P(A)| = 2^A$.

3. הראו שכללי חזקה האריתמטיים הבאים תקפים גם לגבי העוצמות. (ניתן להניח ש A, B, C הן קבוצות זרות).

$$(א) (|A| |B|)^{|C|} = |A|^{|C|} \times |B|^{|C|}$$

$$(ב) |A|^{|B|+|C|} = |A|^{|B|} |A|^{|C|}$$

$$(ג) (|A|^{|B|})^{|C|} = |A|^{|B||C|}$$

4. הראו שקוצות הבאות הן בנות מניה:

(א) אוסף הקטעים הפתוחים $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ עם קצוות רציונליות.

(ב) אוסף המעגלים מהצורה ב \mathbb{R}^2 כך שמרכז המעגל יש קואורדינטות רציונליות ורדיוס רציונלי.

5. יהי $z \in \mathbb{C}$. נאמר ש z הוא מספר אלגברי אם קיים פולינום עם מקדמים שלמים מספרים אלגבריים. הראו שקבוצת כל המספרים האלגבריים היא בת מניה. (הדרכה: לכל פולינום יש מספר סופי של פתרונות. כמו כן, מצאו את עוצמת הפולינומים עם מקדמים שלמים.)