תרגול 10 ־ העתקות לינאריות

10 באוגוסט 2020

1 משפט הדרגה

משפט: אם $T:V\to W$ הע"ל, $\dim V=n$ אז: $\dim(\ker T)+\dim(ImT)=n$.
תרגילים:

1. האם קיימת הע"ל $T:V\to V$ כך ש־ $\ker T=ImT$ כאשר:
   (א) $V=\mathbb{R}^3$
   (ב) $V=\mathbb{R}^4$

   פתרון: א. לא. אם הייתה כזו היינו מקבלים $2\dim\ker T=3$ מה שלא יכול להיות במספרים שלמים.
   ב. נניח למשל $span\{e_1,e_2\}=ImT$, ולכן נצטרך גם $\ker T=span\{e_1,e_2\}$. איך נגרום לזה לקרות? נשתמש במשפט ההגדרה. ניקח את הבסיס $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. כיון שרוצים $\ker T=span\{e_1,e_2\}$ נגדיר $T(e_1)=T(e_2)=0$. וכייון שרוצים $ImT=span\{e_1,e_2\}$, לכן נוכל למשל להגדיר $T(e_3)=e_1,T(e_4)=e_2$ (או כל צ"ל שלהם, כך שהתמונות בת"ל).

2. נגדיר $T:\mathbb{R}^{2\times 3}\to\mathbb{R}^2$ ע"י: $T(A)=\sum_{j=1}^{3}C_j(A)$. מצאו בסיס לגרעין ולתמונה.

   פתרון: נשים לב שהתמונה היא $ImT=\mathbb{R}^2$ כי לכל $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ יש מקור: $T\begin{pmatrix}a&0&0\\b&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, ולכן בסיס לתמונה נוכל לקחת למשל $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
   לגבי הגרעין ־ לפי משפט הדרגה נקבל $\dim(\ker T)+\dim ImT=\dim(\mathbb{R}^{2\times 3})=6$, כיון שמימד התמונה הוא 2 נקבל שמימד הגרעין הוא 4. לכן מספיק למצוא 4 מטריצות בת"ל בגרעין. נשים לב שמתקיים:

$$T\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהמטרייצות בת"ל, ולכן מהוות בסיס לגרעין.

3. תהא $T : V \to W$ הע"ל. ותהא $A \subseteq V$. הוכיחו: $T[span(A)] = span(T[A])$.

פתרון: $\subseteq$: יהא $w \in T[span(A)]$, כלומר, יש $v_1, \dots, v_n \in A, \alpha_1 \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש־ $T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = w$. כיון ש־ T הע"ל נקבל: $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{Tv_i}_{\in T[A]} \in span(T[A])$.

$\supseteq$: יהא $w \in sapn(T[A])$, כלומר, יש $v_1, \dots, v_n \in A, \alpha_1 \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש־ $\sum_{i=1}^n \alpha_i Tv_i = w$, וכיון ש־ T הע"ל נקבל: $w = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \in T[span(A)]$.

4. נסמן $U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. האם קיימת הע"ל $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ כך ש־:

(א) $\ker T = U, ImT = \mathbb{R}^2$

(ב) $\ker T = U, ImT = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון: א. לא, משיקולי מימד: סכום המימדים של הגרעין והתמונה יוצא 4, בסתירה לכך שלפי משפט הדרגה הוא 3.

ב. כן. לפי משפט ההגדרה נוכל לקחת בסיס לתחום: $B = \left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, ולהגדיר את T לפי המשפט:

$$T(v_1) = T(v_2) = 0$$

$$T(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לפי הגדרה זו מקבלים שמימד הגרעין הוא 2, וכיון ש־ v_1, v_2 בגרעין והם בת"ל, אז הם גם פורשים אותו, ולכן $\ker T = U$. בנוסף, המימד של התמונה הוא 1 וכיון ש־ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ בתמונה הוא גם פורש.

2 וקטורי קואורדינטות

1. תרגיל $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{pmatrix}$$

מצאו את וקטורי הקואורדינטות של כל אחד מתמונות איברי הבסיס B לפי הבסיס C במקרים הבאים:

(א) $B = \{1, x, x^2\}$ $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[T(x^2)\right]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

הערה: מטריצה המייצגת העתקה מוגדרת באופן הבא: $T : V \to W$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ בסיסים סדורים בהתאמה, אזי:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_n]_C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

והיא מקיימת:

$$[T]_C^B \cdot [v]_B = [Tv]_C$$

למשל אצלנו נקבל:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת נוכל לחשב (וקטור קואורדינטות של) תמונת וקטור כללי (לפי הבסיס C):

$$[T(ax^2+bx+c)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a+b+c \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} c & b \\ a+b+c & 2a+b \end{pmatrix}$$

(ב) $B = \left\{1, 1+x, 1+x^2\right\}$ $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[T(x^2)\right]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ג) $B=\left\{1,1+x,1+x^2\right\} C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

$$T(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1+x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1+x^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[T(x^2)\right]_C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$B=\left\{1,1+x,1+x^2\right\} C=\left\{A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

פתרון: ד. מתקיים: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & -1 & 2 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(-4a-b-2c+7d\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a+b+c-2d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\left(-2a-2b-c+5d\right) \end{array}\right)$.

כלומר,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(-4a-b-2c+7d\right)A_1+(a+b+c-2d)A_2+(a-d)A_3+\frac{1}{3}\left(-2a-2b-c+5d\right)A_4$$

מה שאומר:

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-4a-b-2c+7d\right) \\ a+b+c-2d \\ a-d \\ \frac{1}{3}\left(-2a-2b-c+5d\right) \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$T(1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow[T(1)]_C=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T(1+x)=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow[T(x)]_C=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$T(1+x^2)=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left[T(x^2)\right]_C=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

2. $V=\mathbb{R}_2[x]$ ונתבונן בת"מ:

$$W_1=\{p(x):p(1)=0\}$$

$$W_2=span\{1+x,1+2x-x^2\}$$

מצאו חיתוך וסכום. כיון שאנחנו מכירים וקטורי קואורדינטות, נוכל לטפל בסיפור כאילו אנחנו ב-$\mathbb{R}^3$. ניקח בסיס $S=\{1,x,x^2\}$.

$$W_1=\{\left[a+bx+cx^2\right]_S=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}:a+b+c=0\}\Rightarrow[W_1]_S=N\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

$$[W_2]_S=span\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\1&2&b\\0&-1&c\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&1&b-a\\0&-1&c\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&1&b-a\\0&0&c+b-a\end{array}\right)$$

ולכן

$$[W_2]_S=N\begin{pmatrix}-1&1&1\end{pmatrix}$$

ומכאן נוכל להגיע לחיתוך:

$$[W_1 \cap W_2]_S = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

כעת לסכום:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2) = 2+2-1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$$

ולכן הסכום זה כל המרחב (ע"י הכלה חד־כיוונית ושיוויון מימדים).