אלגברה לינארית- פתרון תרגיל 5

(1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = -R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 - 3R_1]{R_2 = R_2 - 5R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = 2R_3]{R_2 = -\frac{1}{10}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{10} & 0 & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 + \frac{1}{10}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות השורה שביצענו הן (בהתאמה לסדר הפעולות):

$$\overset{E_1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{E_2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{E_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{E_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{E_5}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\overset{E_6}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{E_7}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}, \overset{E_8}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{E_9}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

לכן נקבל

$$A^{-1} = \overset{E_9}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_8}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_7}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \overset{E_6}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_5}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\cdot \overset{E_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A = \overset{E_1^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{E_2^{-1}}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_3^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_4^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_5^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_6^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\overset{E_7^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \overset{E_8^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{E_9^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

סעיף ב:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - 2R_1 \to R_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 + 2R_2 \to R_1 \\ -R_2 \to R_2 \\ R_3 - 3R_2 \to R_3 \\ R_4 - 2R_2 \to R_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + 3R_3 \to R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 - 3R_3 \to R_1 \\ R_2 + R_3 \to R_2 \\ -\frac{2}{3}R_4 \to R_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 - \frac{1}{2}R_4 \to R_1 \\ R_2 - \frac{1}{2}R_4 \to R_2 \\ R_3 - \frac{1}{2}R_4 \to R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

a) לא נכון A הפיכה לכן ל $Ax=0$ יש רק את פתרון האפס, אבל B לא חייבת להיות הפיכה ולכן למשל ניקח $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ אזי $x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ יפתור את $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

b) לא נכון. A^{-1} הפיכה לכן ל $A^{-1}x=0$ יש רק פתרון האפס לעומת זאת אם למשל $B=0$ (מטריצת האפס) אזי כל וקטור יפתור את המערכת $BAx=0$.

c) לא נכון. נקח $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$BAx=b\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$ABx=b\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

שאלה 3:

a) לא נכון $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

b) לא נכון $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

שאלה 4:

($\Leftarrow$) A הפיכה $\Leftarrow$ $k=1$

($\Rightarrow$) קיים k כך ש A^k הפיכה $\Leftarrow$ ז"א קיימת M כך ש $A^k\cdot M=I$. נכתוב ונקבל ש A הפיכה וההופכית שלה היא $A^{k-1}\cdot M$.

שאלה 5:

עבור $B\neq 0$ המטריצה הנתונה תהיה מחלקת אפס ולכן לא יכולה להיות הפיכה. לכן נחפש עבור אילו ערכי α המטריצה הנתונה אינה הפיכה.

$$\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\1&\alpha&1\\\alpha&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-\alpha R_1]{R_2=R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&\alpha-1&1-\alpha\\0&1-\alpha&1-\alpha^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&\alpha-1&1-\alpha\\0&0&2-\alpha-\alpha^2\end{pmatrix}$$

השורה השניה תתאפס כאשר $\alpha=1$. השורה השלישית כאשר:

$$\alpha^2+\alpha-2=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm3}{2}\begin{matrix}\nearrow 1\\\searrow -2\end{matrix}$$

לכן עבור $\alpha=1,-2$ המטריצה לא תהיה הפיכה ולכן קיימת B המקיימת את המשואה.

שאלה 6:

$$A^2+5A+6I=0\Leftrightarrow A^2+5A=-6I\Leftrightarrow -\tfrac{1}{6}A^2-\tfrac{5}{6}A=I\Leftrightarrow A(-\tfrac{1}{6}A-\tfrac{5}{6}I)=I$$

לכן A הפיכה ו $A^{-1}=-\frac{1}{6}A-\frac{5}{6}I$.

שאלה 7:

א) $A^3 = A^2A = AA^2 = I \Rightarrow A^2 = A^{-1}$

ב)

$$BA = A(A+I) = A^2 + AI = A^2 + A$$
$$\Rightarrow BAA^{-1} = BI = B = \left(A^2 + A\right)A^{-1} = A^2A^{-1} + AA^{-1} = A + I$$

ג)

$$BABA = \left[A\left(A+I\right)\right]^2 = \left(A^2 + A\right)^2 + A^4 + 2A^3 + A^2 = A^2(A^2 + 2A + I) = A^2\left(A+I\right)^2 = A^2B^2$$

שאלה 8:

a) $A^1 = A = 0_{n\times n}$ אבל $A^0 = I \neq 0$.

b) $A \cdot A^{k-1} = 0 \Leftrightarrow A^k = 0$ נקח את $B = A^{k-1}$ ו- $A^{k-1} \neq 0$ לפי ההגדרה של מטריצה נילפוטנטית מסדר k.

c) הוכחנו בכיתה שמטריצה מחלקת אפס אינה יכולה להיות הפיכה. אבל נוסיף הוכחה שלמה: נניח ש A נילפוטנטית מסדר k הפיכה (ז"א קיימת A^{-1}). לפי הגדרת נילפוטנטיות מתקיים $A^k = 0$. נכפול את שני האגפים ב A^{-1}. נקבל $A^{-1} \cdot A^k = A^{-1} \cdot 0 \Leftarrow A^{k-1} = 0$ בסתירה לכך ש $A^{k-1} \neq 0$. לכן ההנחה לא נכונה והמטריצה אינה הפיכה.