שיעורי בית מספר 2

1. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. יהא $\lambda\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי λ ע"ע של AB אמ"מ λ ע"ע של BA [פצלו למקרים: $\lambda=0$ ו $\lambda\neq 0$].

פתרון: אם $\lambda=0$ אז AB לא הפיכה. לכן $|AB|=0$ ומכאן ש $|BA|=|AB|=0$ ולכן BA אינה הפיכה ולכן $\lambda=0$ ע"ע של BA.

אם $\lambda\neq 0$, לפי הגדרה קיים $v\neq 0$ כך ש $ABv=\lambda v$. בהכפלה ב B משמאל נקבל $BABv=B\lambda v=\lambda Bv$. λ ע"ע ש לBA בהנחה ש Bvו"ע שזה קורה אם $Bv\neq 0$.
כיוון ש $\lambda\neq 0, v\neq 0$ אז $\lambda v\neq 0$ ולכן, אם נניח בשלילה כי $Bv=0$ אז בהכפלה ב A משמאל נקבל כי $ABv=0$ אבל $ABv=\lambda v$ ונקבל סתירה.

מה שהוכחנו שאם λ ע"ע של AB אז הוא גם של BA. לכל שתי מטריצות A,B.
בפרט אם ניקח $A=B$ ו $B=A$ נקבל את הכיוון השני.

2. עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ המטריצה $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&a\\1&1&1\end{pmatrix}$ אינה לכסינה

(א) מעל $\mathbb{R}$

(ב) מעל $\mathbb{C}$

פתרון:מחישוב ישיר נקבל כי $p_A(x)=(x-1)\left(x-1+\sqrt{a}\right)\left(x-1-\sqrt{a}\right)$
ולכן הע"ע הם $1,1\pm\sqrt{a}$.

אם $a>0$ יש לנו 3 ע"ע ממשים שונים ולכן המטריצה לכסינה מעל הממשים וגם מעל המרוכבים.
אם $a<0$ אזי הפ"א לא מל"ל מעל הממשים ולכן במקרה זה המטריצה לא לכסינה. מעל המרוכבים יהיו לנו 3 ע"ע שונים ולכן לכסינה.
אם $a=0$ יהיה לו ע"ע בודד ששווה ל 1 בעל ר"א 3 ור"ג 1 ולכן המטריצה לא לכסינה גם מעל הממשים וגם מעל המרוכבים.

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I)=5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

פתרון : ידוע כי $rank(A)+\dim N(A)=9$ ולכן $\dim N(A)=4$. כלומר הר"ג של ע"ע = 0 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. משיקולים דומים הר"ג של ע"ע = 3 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. נתון שיש ע"ע =5 ולכן הר"א שלו לפחות 1.

כיוון שסכום ר"א של הע"ע הוא 9 אזי נקבל כי

ע"ע =0 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =3 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =5 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 1

לפי משפט A לכסינה והמטריצה האלכסונית הדומה לה היא

$$D=\begin{pmatrix}0I_4&&\\&3I_4&\\&&5\end{pmatrix}$$

כאשר I_4 היא מטריצת היחידה מגודל 4×4.

4. תהא $A\in\mathbb{C}^{3\times3}$ מטריצה עם פ"א $p_A=x^3-2ix^2+3x$ מה הדרגה של A^k ?
פתרון: מתקיים כי $x^3-2ix^2+3x=x(x^2-2ix+3)=x(x+i)(x-3i)$. לכן לכסינה לכן $A^k=PD^kP^{-1}$ ולכן הדרגה שלה הוא 2 .

5. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו כי אם A, cA דומות (עבור c מרוכב) אזי $c^k=1$ עבור $1\le k\le n$ או ש $A^n=0$. הדרכה: הפ"א של cA
פתרון: אם $c=0$ אזי Aדומה למטריצת האפס ולכן $A=0$. אחרת, נסמן $p_A(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ ואז

$$p_{cA}(x)=|xI-cA|=\left|c\left(\frac{x}{c}I-A\right)\right|=c^n\left|\left(\frac{x}{c}I-A\right)\right|=c^np_A(\frac{x}{c})=c^n\sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{x}{c}\right)^i=\sum_{i=0}^n c^{n-i}a_ix^i$$

כיוון שלמטריצות דומות אותו פ"א אזי $\sum_{i=0}^n c^{n-i}a_ix^i=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ ולכן $c^{n-i}a_i=a_i$ לכל $0\le i\le n$. אם קיים $0\le i\le n-1$ כך ש $a_i\neq0$ אזי $c^{n-i}=1$ וסיימנו. אחרת, לכל $0\le i\le n-1$ מתקיים כי $a_i=0$ ואז נקבל כי $p_A(x)=x^n$ ($a_n=1$ כי זהו פולינום מתוקן). לפי קיילי המילטון $A^n=0$.

6. תהא $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$. נתון: $1,-1$ ע"ע של A. נניח כי $\deg(m_A(x))=2$.

(א) הוכיחו ש־A ניתנת לשילוש.
פתרון: נתון שיש לפחות שני ערכים עצמיים, וכיון ש־ $\deg(m_A(x))=2$ נקבל שאין ערכים עצמיים נוספים. לכן כל הע"ע ממשיים ולכן A ניתנת לשילוש.

(ב) הוכיחו ש־A הפיכה ומצאו את A^{-1}.
פתרון: שוב מ הנתונים נקבל: $m_A(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$, וכיון שפ"מ מאפס את המטריצה נקבל: $A^2-I=0$ כלומר, $A^2=I$ מה שאומר: $A^{-1}=A$.

(ג) הוכיחו: $|A|=1 \iff tr(A)=0$.
פתרון: לפי משפט מההרצאה העקבה היא סכום ע"ע והדטרמיננטה היא המכפלה שלהם. אם הסכום מתאפס זה אומר שר"א של 1 ושל 1־ הוא 2, ולכן נקבל $|A|=1^2\cdot(-1)^2=1$, אחרת, ר"א של 1־ הוא 1 או 3 (ולהיפך של 1), מה שגורר $|A|=1^3\cdot(-1)\vee1\cdot(-1))^3=-1\neq1$.

(ד) נסמן $f(x)=x^2-x-2$. האם $f(A)$ הפיכה?
פתרון: נקבל: $f(x)=(x-2)(x+1)$, וכיון ש־ -1 ע"ע אז $A+I$ לא הפיכה ולכן גם $f(A)=(A-2I)(A+I)$ לא הפיכה.

7. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת:

$$\forall j: A_{i,j}=\begin{cases}1 & i\text{ is even}\\ -1 & i\text{ is odd}\end{cases}$$

הוכיחו:

(א) A לכסינה אם ורק אם n אי־זוגי.

(ב) A ניתנת לשילוש.
פתרון: א+ב. נשים לב שמתקיים $rank(A)=n-1$, ולכן 0 ע"ע עם ריבוי

גיאומטרי $n-1$, לכן הפולינום האופייני הוא מהצורה $x^{n-1}(x-\alpha)$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ (חוץ מ־0 יכול להיות רק עוד גורם אחד, כי 0 עם ריבוי אלגברי לפחות $n-1$). קיבלנו פ"א המתפרק לגורמים לינאריים, ולכן A ניתנת לשילוש. כעת, A לכסינה אמ"ם יש בסיס מוקטורים עצמיים, ולכן במקרה שלנו אמ"ם יש עוד ע"ע נוסף $\alpha \neq 0$, אמ"ם $tr(A) = 0 \cdot (n-1) + \alpha \neq 0$. נחשב את העקבה:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0 & i \text{ is even} \\ 1 & i \text{ is odd} \end{cases}$$

לכן A לכסינה אמ"ם n אי־זוגי.