

פונקציות מולטילינאריות מתחלפות:

1. קבע אילו מהפונקציות הבאות הן מולטילינאריות או מולטילינאריות מתחלפות. עבור מולטילינאריות בטא אותן כ סכום של תבניות מהצורה $dx_{(i_1, \dots, i_k)}$.

$$\begin{aligned} & (\mathbb{R}^3)^2 \rightarrow \mathbb{R} & \text{i.} \\ & f(v, w) = \langle v, w \rangle \\ & (\mathbb{R}^3)^2 \rightarrow \mathbb{R} & \text{ii.} \\ & f(v, w) = \langle e_1 + e_2 + e_3, v \times w \rangle \end{aligned}$$

2. תהי A מטריצה $k \times n$ ו B מטריצה $n \times k$ כאשר $k \leq n$. הוכיחו $\det(AB) = \sum_I \det(A_I^T) \det(B_I)$ כאשר I הינו אינדקס הרץ על סדרות באורך k עולות עם מספרים בין 1 ל n . וכאשר A_I מסמנת את המטריצה $k \times k$ המתקבלת ע"י מחיקת כל השורות שלא מופיעות ב I .

רמז: אם נקבע את A אזי $\det(AB)$ הינה פונקציה מולטילינארית מתחלפת עבור העמודות של המטריצה B .

3. חשב את $\omega \wedge \eta$ עבור התבניות הדפרנציאליות הבאות:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \omega = 2xdx + ydy \\ \eta = x^3dx + y^2dy \end{cases} & \text{א.} \\ & \begin{cases} \omega = xdx + ydy + zdz \\ \eta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx \end{cases} & \text{ב.} \end{aligned}$$

4. חשב את $d\omega$ עבור התבניות:

$$\begin{aligned} & \omega = x^2y + y^3 & \text{א.} \\ & \omega = xydy + (x+y)^2 dx & \text{ב.} \\ & \omega = xdx \wedge dy + zdy \wedge dz + ydz \wedge dx & \text{ג.} \\ & \omega = x^2ydy \wedge dz & \text{ד.} \end{aligned}$$

אילו מהתבניות הנתונות סגורות? (תזכורת: תבנית דיפרנציאלית נקראת סגורה אם הנגזרת החיצונית שלה מתאפסת)

5. הראה שהתבניות הדפרנציאליות הבאות ב $\Omega^1(R^3)$ סגורות ומדוייקות [תזכורת: תבנית דיפרנציאלית ω נקראת מדוייקת, אם היא הנגזרת החיצונית של תבנית אחרת η (כלומר $\omega = d\eta$ עבור η מסוימת)]

א. $\omega = (ye^{xy} - z(\sin(xz)))dx + (xe^{xy} + z^2)dy + (-x\sin(xz) + 2yz + 3z^2)dz$

ב. $\omega = (2xy^3z^4)dx + (3x^2y^2z^4 - ze^y(\sin(ze^y)))dy + (4x^2y^3z^3 - e^y\sin(ze^y) + e^z)dz$

6. שדה ווקטורי $F: R^3 \rightarrow R^3$ מוגדר ע"י

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + G(x, y, z)\vec{k}$$

נתאים לשדה זה את ה-2-תבנית הדפרנציאלית $\omega = Gdx \wedge dy + Mdy \wedge dz + Ndz \wedge dx$

הראה ש- $d\omega = (\text{div}F)dx \wedge dy \wedge dz$

תזכורת: $\text{div}F = \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy} + \frac{dG}{dz}$