שרשראות מרקוב בזמן רציף:

הגדרה: תהליך סטוכסטי מעל מרחב S הוא משפחת מ"מ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

ההתפלגות של התהליך X_t מוגדרת באמצעות ההתפלגויות השוליות – כלומר, אוסף כל הווקטורים האקראיים הסופיים: לכל $0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_k$,

$$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_k} \end{pmatrix}$$

נקודת מבט שונה אך שקולה.

נסמן $\Omega=S^{\mathbb{R}^+}$. כל תוצאה אפשרית $\omega\in\Omega$ היא פונקציה (מסלול $f:\mathbb{R}^+\to S$).

יש לתאר מידות מעל מרחבי פונקציות.

הגדרה: שני תהליכים סטוכסטים $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ ו $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ שווים אם כל ההתפלגויות השוליות שלהם שוות, כלומר, $\forall k\in\mathbb{N},\forall 0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_k$

$$\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}\right)\sim\left(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_k}\right),$$

כלומר $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall 0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_k,\ \forall z_1\ldots z_k\in\mathbb{R}$,

$$P\left(X_{t_1}\le z_1\cap\ldots\cap X_{t_k}\le z_k\right)=P\left(Y_{t_1}\le z_1\cap\ldots\cap Y_{t_k}\le z_k\right).$$

דוגמה: X_t ב"ת מטבע. Y_0 מטבע, $Y_t=Y_0$.

דוגמה: תהליך פואסון. סופר ארועים בלתי תלויים הקורים בזמן אקראי (תורים, פליטה גרעינית).

יהי N_t תהליך סטוכסטי המקיים:

1. $N_0=0$.
2. לכל $t,s\ge 0$, $N_{t+s}-N_t$ לא תלוי ב t.
3. לכל $0\le t_1\le t_2\le t_3\le t_4$, המ"מ $N_{t_2}-N_{t_1}$ ו $N_{t_4}-N_{t_3}$ הם ב"ת.
4. $P(N_h\ge 1)=\lambda h+o(h)$.
5. $P(N_h\ge 2)=o(h)$.

תרגיל: חשבו את $P_t(m)=P(N_t=m)$.

עבור $m=0$, נסמן $g(t)=P_t(0)$

$$g(t+h)=P(N_{t+h}=0)=P\left(\{N_{t+h}-N_t=0\}\cap\{N_t-N_0=0\}\right)=$$
$$P\left(\{N_{t+h}-N_t=0\}\right)P\left(\{N_t-N_0=0\}\right)=g(t)g(h)=g(t)(1-P_0(N_h\ge 1))$$

ולכן

$$g'(t)\xleftarrow[h\to 0]{}\frac{g(t+h)-g(h)}{h}=-g(t)\frac{P(N_t\ge 1)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}-g(t)\lambda$$

כלומר, $g(t)$ מקיים

$$g'(t)=-g(t)\lambda,\ \mathrm{g}(0)=1$$

הפתרון: $g(t)=e^{-\lambda t}$.

באותו האופן : $P_t(m)$ מקיים

$$P_t^{'}(m) = -\lambda P_t(m) + \lambda P_t(m-1);\ \mathrm{P}_0(m) = 0 .$$

הפתרון : $P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$, כלומר, התפלגות פואסון.

<u>תרגיל :</u> תאור מסלולים של N_t .

<u>הגדרה :</u> זמן האירוע ה- k : $T_k = \inf_t \left\{ N_t \ge k \right\}$.

זמני המתנה : $S_n = T_n - T_{n-1}$.

<u>תרגיל :</u> בתהליך פואסון זמני ההמתנה S_k הם ב"ת ומתפלגים מעריכית עם קצב λ .

פתרון : נסמן $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ונחשב את הצפיפות של T .

$$F(z_1, \ldots, z_n) = P\left[T_1 \le z_1 \cap \ldots \cap T_n \le z_n \right] = \int_{[0,z_1]} dt_1 \int_{[0,z_1]} dt_2 \ldots \int_{[0,z_1]} dt_n\, f(t_1, \ldots, t_n)$$

כלומר, הצפיפות נתונה בנוסחה

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial}{\partial z_1} \ldots \frac{\partial}{\partial z_n} F(z_1, \ldots, z_n) = \lim_{h \to 0^+} h^{-n} P\left[\bigcap_{i=1}^{n} T_i \in (z_1, z_1 + h] \right]$$

עבור $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ ו h מספיק קטן האירועים $T_i \in (z_i, z_i + h]$ זרים ולכן

$$\bigcap_{i=1}^{n} T_i \in (z_1, z_1 + h] =$$
$$\left\{ N_{t_1} - N_0 = 0 \right\} \cap \left\{ N_{t_1+h} - N_{t_1} = 1 \right\} \cap \left\{ N_{t_1} - N_{t_2} = 0 \right\} \cap \left\{ N_{t_2+h} - N_{t_2} = 1 \right\} \cap \ldots \cap \left\{ N_{t_n+h} - N_{t_n} \ge 1 \right\}$$

וההסתברויות הן

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} T_i \in (z_1, z_1 + h] \right] =$$
$$P\left[N_{z_1} - N_0 = 0 \right] P\left[N_{z_1+h} - N_{z_1} = 1 \right] P\left[N_{z_2} - N_{z_1+h} = 0 \right] P\left[N_{z_2+h} - N_{z_3} = 1 \right] \ldots P\left[N_{z_n+h} - N_{z_n} \ge 1 \right] =$$
$$P_{z_1}(0) P_h(1) P_{z_2 - z_1 - h}(0) P_h(1) \ldots (1 - P_h(0)) =$$
$$e^{-\lambda z_1} (\lambda h + o(h)) e^{-\lambda (z_2 - z_1 - h)} (\lambda h + o(h)) \ldots e^{-\lambda (z_n - z_{n-1} - h)} (\lambda h + o(h)) =$$
$$\lambda^n h^n e^{-\lambda (z_n + hn)} + o(h^n)$$

בגבול $h \to 0^+$ $f(z_1, \ldots, z_n) = \lambda^n e^{-\lambda z_n}$.

נסמן $S = (S_1, \ldots, S_n) = (T_1 - T_0, \ldots, T_n - T_{n-1})$.

תרגיל : הצפיפות של S היא

$$f_S(z_1, \ldots, z_n) = \lambda^n e^{-\lambda (z_1 + \ldots + z_n)} .$$

פתרון : נחשב את ההתפלגות של S .

$$P\left[S_1 \le A_1 \cap \ldots \cap S_n \le A_n \right] = P\left[T_1 \le A_1 \cap T_2 \le T_1 + A_1 \cap \ldots \cap T_n \le T_{n-1} + A_n \right] =$$
$$\int_0^{A_1} dt_1 \int_{t_1}^{t_1 + A_2} dt_2 \ldots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1} + A_n} dt_n\, f(t_1, \ldots, t_n) = \int_0^{A_1} dt_1 \int_{t_1}^{t_1 + A_2} dt_2 \ldots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1} + A_n} dt_n \lambda^n e^{-\lambda t_n} = \ldots = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda A_i})$$

שרשראות מרקוב בזמן רציף:

<u>הגדרה :</u> שרשרת מרקוב הומוגנית רציפה בזמן היא תהליך סטוכסטי מעל מרחב בן מנייה S המקיימת :

$$\forall t\geq 0,\ \forall s\geq 0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \forall 0\leq s_1\leq\ldots\leq s_k\leq s,\ \forall i,j\in S,\ \forall i_1,\ldots,i_k\in S$$
$$P\left(X_{s+t}=j\mid X_s=i,X_{s_1}=i_1,\ldots,X_{s_k}=i_k\right)=P\left(X_t=j\mid X_0=i\right)$$

<u>דוגמה :</u> N_t.

<u>הגדרה :</u> נסמן

$$P_t=\left\{P_t^{ij}\right\}_{i,j\in S}$$
$$P_t^{ij}=P\left(X_t=j\mid X_0=i\right).$$

נקראת חבורת המעבר (למחצה) – transition semigroup.

<u>דוגמה :</u> N_t.

<u>למה :</u> צ'אפמן-קולמגורוב

$$P_{t+s}{}^{ij}=\sum_{k\in S}P_t^{ik}P_s^{kj}$$

או, בסימון מטריציוני

$$P_{t+s}=P_tP_s.$$

<u>למה :</u> $P_0=I$.

<u>למה :</u> $\mu_t^T=\mu_0P_t$ או $\mu_t=P_t\mu_0$.

<u>דוגמה :</u> תהליך פליפ-פלופ $X_t=(-1)^{N_t}$.

הראו שזה תהליך מרקוב. חבורת המעבר : $P_t=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{-2\lambda t} & 1-e^{-2\lambda t}\\ 1-e^{-2\lambda t} & 1+e^{-2\lambda t}\end{pmatrix}$

<u>הגדרה :</u> שרשראות מרקוב אחידות.

תהי X_n שרשרת מרקוב – נקראת השרשרת הטמונה.

N_t תהליך פואסון – נקרא השעון.

$X_t=X_{N_t}$ נקראת שרשרת מרקוב אחידה.

<u>תרגיל:</u> חבורת המעבר של שרשרת אחידה היא $P_t=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}K^n=e^{-\lambda t}e^{\lambda Kt}$, כאשר K היא מטריצת המעבר של X_n.

<u>הגדרה :</u> מטריצת המעבר נקראת רציפה בזמן t אם $\lim_{h\to 0^+}P_{t+h}=P_t$.

תרגיל: אם P_t רציפה ב $t=0$ אז היא רציפה לכל $t \ge 0$.

משפט: אם P_t רציפה ב $t=0$ אז הגבולות הבאים קיימים

א. $q_i = -q_{ii} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-P_h^{ii}}{h} \in [0,\infty]$.

ב. $q_{ij} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_h^{ij}}{h} \in [0,\infty)$.

הוכחה: באתר.

הגדרה: $A = \{q_{ij}\}_{i,j\in S}$ נקראת היוצר האינפיניציזימלי (האופרטור האופייני) של השרשרת.

$$A = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_h - P_0}{h} = P_0'$$
.

תרגיל: היוצר של שרשרת מרקוב אחידה $A = \lambda(K-I)$.

הגדרה:

א. $\forall i, q_i < \infty$ אז השרשרת נקראת יציבה (stable).

ב. אם $\forall i, q_i = \sum_{j\ne i} q_{ij}$ אז השרשרת נקראת שומרת (conservative).

תרגיל: הראו כי אם S סופי אז השרשרת היא שומרת. רמז: התחילו עם $\sum_{j\in S} P_h^{ij} = 1$. מה עלול לא לעבוד אם S בת מנייה אין סופית.

דוגמה: תהליכי לידה ומוות. מוגדרים באמצעות היוצר:

$$i, j \in \mathbb{N},\ q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = j+1 \\ \mu_i & j = i-1 \\ -\lambda_i - \mu_i & j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
.

<u>משוואה קדמית ואחורית:</u>

נשים לב כי $\frac{P_{t+h} - P_t}{h} = P_t \frac{P_h - P_0}{h} = \frac{P_h - P_0}{h} P_t$.

אם ניתן לקחת את הגבול $h \to 0^+$ אז

$$\frac{dP_t}{dt} = P_t A = AP_t$$
.

השמאלית נקראת משוואה קדמית (Fokker-Planck), הימנית אחורית (קולמגורוב).

למה: אם $|S| < \infty$ הגבולות קיימים והפתרון הוא

$$P_t = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$
.

משפט: למשוואה האחורית של שרשרת יציבה ושומרת קיים פתרון והוא יחיד.

הוכחה: באתר.

<u>משפט:</u> למשוואה הקדמית של שרשרת מרקוב יציבה ושומרת המקיימת $\sum_k P_t^{ik} q_k < \infty$ יש פתרון והוא יחיד.
הוכחה: באתר.

<u>משפט:</u> אם המשוואה האחורית מתקיימת וגם $q\cdot\mu = \sum_i q_i \mu_t^i < \infty$ אז $\frac{d}{dt}\mu_t^T = \mu_t^T A$.

הוכחה:

$$\frac{\mu_{t+h}^T - \mu_t^T}{h} = \mu_t^T \frac{P_h - I}{h}$$

ובגבול $h \to 0^+$ מקבלים מש"ל.

<u>הגדרה:</u> התפלגות סטציונרית של השרשרת היא התפלגות π המקיימת $\forall t \ge 0, \pi^T = P_t \pi^T$.

<u>מסקנה:</u> $\pi^T A = 0$.

<u>דוגמה:</u> תהליך לידה ומוות.

<u>תכונת מרקוב:</u>

<u>הגדרה:</u> נתון זמן $s \ge 0$.
התהליך אחרי זמן s הוא $\{X_{t+s}\}_{t\ge 0}$.
התהליך לפני זמן s הוא $\{X_{t\wedge s}\}_{t\ge 0}$.

<u>משפט:</u> תכונת מרקוב החלשה
א. בהינתן תנאי התחלה השרשראות לפני ואחרי s הן ב"ת.
ב. השרשרת אחרי s היא שרשרת מרקוב.
הוכחה:

נגדיר

$$E_j[Y] = E[Y \mid X_0 = j].$$

ב. נגדיר $Y_t = X_{t+s}$. מההגדרה,

$$\forall t \ge 0,\ \forall \tau \ge 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall 0 \le s_1 \le \ldots \le s_k \le \tau,\ \forall i, j \in S,\ \forall i_1, \ldots, i_k \in S$$
$$P\left(Y_{\tau+t} = j \mid Y_\tau = i, Y_{s_1} = i_1, \ldots, Y_{s_k} = i_k\right) =$$
$$P\left(X_{s+\tau+t} = j \mid X_{s+\tau} = i, X_{s+s_1} = i_1, \ldots, X_{s+s_k} = i_k\right) = P\left(X_t = j \mid X_0 = i\right) = P_t^{ij}$$

א. נראה כי $\forall u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p, t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$

$$E_{X_0}\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j+s} + i\sum_{k=1}^p v_k X_{s_k \wedge s}\right\}\right] = E_{X_0}\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^p v_k X_{s_k\wedge s}\right\} E_{X_s}\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j+s}\right\}\right]\right]$$

נוכיח כי

$$E_{X_0}\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_jX_{t_j+s}+i\sum_{k=1}^{p}v_kX_{s_k\wedge s}\right\}1_{X_s=r}\right]=$$
$$E_{X_0}\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{p}v_kX_{s_k\wedge s}\right\}1_{X_s=r}\right]E_r\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_jX_{t_j+s}\right\}\right]$$

סכימה על $r\in S$ נותנת מש"ל.
נוכיח עבור $n=p=1$. המקרה הכללי, באותו האופן, תרגיל לבית.

$$E_{X_0}\left[\exp\left\{iu_1X_{t_1+s}+iv_1X_{s_1\wedge s}\right\}1_{X_s=r}\right]=$$
$$\sum_{m_1,n_1}P\left[X_{s_1\wedge s}=m_1\mid X_0\right]P\left[X_s=r\mid X_{s_1\wedge s}=m_1\right]P\left[X_{t_1+s}=n_1\mid X_s=r\right]e^{iu_1n_1}e^{iv_1m_1}=$$
$$\sum_{m_1}\left\{P\left[X_{s_1\wedge s}=m_1\mid X_0\right]P\left[X_s=r\mid X_{s_1\wedge s}=m_1\right]e^{iv_1m_1}\right\}\times\left\{\sum_{n_1}P\left[X_{t_1+s}=n_1\mid X_s=r\right]e^{iu_1n_1}\right\}=$$
$$E_{X_0}\left[\exp\left\{iv_kX_{s_k\wedge s}\right\}\right]E_{X_s}\left[\exp\left\{iu_jX_{t_j+s}\right\}\right]$$

<u>הגדרה:</u> זמן עצירה.
יהי $\left\{X_t\right\}_{t\geq 0}$ תהליך סטוכסטי עם קבוצת מצבים S. מ"מ τ נקרא זמן עצירה עבור X_t אם $\left\{\tau\leq t\right\}\in\sigma(\left\{X_s\right\}_{0\leq s\leq t})$, כלומר, בזמן t ניתן לדעת אם האירוע τ קרה כבר.

דוגמאות: τ קבוע, $\tau=\inf_t\left\{X_t\leq 0\right\}$. היום הגשום הראשון בשנה.
דוגמאות שלא: $\tau=\sup_t\left\{X_t\leq 0\right\}$. היום הגשום האחרון בשנה.

זמן יציאה\בריחה ממצב $E_i=\inf_{t\geq 0}\left\{X_t\neq i\right\}$.
זמן חזרה: $R_i=\inf_{t\geq 0}\left\{t>E_i\wedge X_t=i\right\}$.

<u>הגדרה:</u> נתון זמן עצירה $\tau\geq 0$.
התהליך אתרי זמן τ הוא $\left\{X_{t+\tau}\right\}_{t\geq 0}$.
התהליך לפני זמן τ הוא $\left\{X_{t\wedge\tau}\right\}_{t\geq 0}$.

<u>משפט:</u> תכונת מרקוב החזקה.
יהי X_t תהליך מרקוב רציף ו τ זמן עצירה.
א. השרשראות לפני ואחרי τ הן ב"ת בהינתן תנאי התחלה.
ב. השרשרת אחרי τ היא שרשרת מרקוב.

הוכחה:

נניח ש τ יכול לקבל מספר בן מנייה של ערכים $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. נשתמש בזהות $1(\omega)=\sum_i 1_{\tau=a_i}(\omega)$,

כלומר, נפצל לכל הערכים האפשריים של τ ונשתמש בתכונת מרקוב.

המקרה הכללי: לכל n, נקרב את τ על ידי מ"מ τ_n

$$\tau_n=\begin{cases}0 & \tau=0\\ (k+1)2^{-n} & k2^{-n}<\tau\le(k+1)2^{-n}\\ \infty & \tau=\infty\end{cases}.$$

τ_n הוא זמן עצירה עם מספר בן מנייה של תוצאות אפשריות.

כיוון ש X_t רציף

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau\\ &\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n\wedge a}=X_{\tau\wedge a}\\ &\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n+a}=X_{\tau+a}\\ &\lim_{n\to\infty}1_{X_{\tau_n}=k}=1_{X_\tau=k}\end{aligned}$$

<u>הגדרה:</u> זמני מעבר:

$$\begin{aligned}&T_0=0\\ &T_{k+1}=\inf_{t\ge0}\left\{X_t\ne X_{T_k}\right\}\end{aligned}.$$

<u>טענה:</u> זמני המעבר הם זמני עצירה.

<u>הגדרה:</u> יהי Δ מצב חדש שאינו מופיע ב X_t. השרשרת הטמונה ב X_t היא

$$X_n=\begin{cases}X_{T_n} & T_n<\infty\\ \Delta & T_n=\infty\end{cases}.$$

<u>משפט:</u>

תהי X_t שומרת ויציבה.

א. X_n היא שרשרת מרקוב.

ב. בהינתן מסלול X_n, זמני ההמתנה $S_n=T_n-T_{n-1}$ הם ב"ת ומתפלגים אקספוננציאלית $S_n\sim\exp(\lambda(X_{n-1}))$.

הוכחה:

א + חוסר תלות נובעים מתכונת מרקוב החזקה.

נסמן $g(t)=P(T_1>t\mid X_0=i)$.

אז $g(0)=1$. מתכונת מרקוב החזקה $g(t+s)=g(t)g(s)$.

$$g'(t)=\lim_{h\to0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=g(t)\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g(t)g'(0)$$

g יורדת. נסמן $g'(0)=-\lambda_i$. מתכונת מרקוב החזקה λ_i תלוי רק ב i.

לכן $P(T_1\le t)=1-e^{-\lambda_i t}$.

תרגיל: יהי A היוצר של X_t. מטריצת המעבר של X_n היא

$$P_{\Delta\Delta}=1$$

$$P_{\Delta i}=0$$

$$P_{i\Delta}=\begin{cases}1 & q_i=0\\ 0 & q_i>0\end{cases}$$

$$P_{ij}=\begin{cases}0 & q_i=0\\ q_{ij}/q_i & q_i>0\end{cases}$$

טענה: ניתן "לכוון" את קצב השעונים (להגביר את הקצב).

דוגמה: מספר מצבים סופי $A=\lambda(K-I)$. לשנות את K ו λ בהתאם.

מסקנה: כל שרשרת X_t ניתן לכתוב כשרשרת אחידה עם קצב שעון $\lambda>\sup q_i$. ללא הגבלת הכלליות השרשרת הטמונה היא אי-מחזורית.

תרגיל: כתבו את תהליך פליפ-פלופ ואת מודל אהרנפסט כשרשרת אחידה לא מחזורית.

התנהגות אסימפטוטית:

להכ נניח שרשרת אחידה $X_t=X_{N_t}$.

הגדרה: שרשרת נקראת בלתי פריקה אם X_n בלתי פריקה.

הגדרה: שרשרת נקראת חוזרת אם X_n חוזרת.

הגדרה: מצב i נקרא חוזר חיובי אם $E_i[R_i]<\infty$.

הגדרה: ν נקראת מידה סטציונרית אם $\nu^T P_t=\nu^T$.

משפט: לשרשרת בלתי פריקה וחוזרת קיימת מידה סטציונרית יחידה (עד כדי מכפלה בקבוע).

כמו כן $\forall k,\nu_i=E_k\left[\int_0^{R_k}1_{X_s=i}ds\right]$.

הוכחת יחידות:

יהי A היוצר, ונניח $\nu^T A=0$.

$A=\lambda(K-I)$, ולכן $\nu^T K=\nu^T$, כלומר ν היא המידה הסטציונרית היחידה של X_n.

הוכחת קיום:

להכ $k=0$. נגדיר $\nu_i=E_0\left[\int_0^{R_0}1_{X_s=i}ds\right]$, ונראה שזו מידה סטציונית.

כלומר, יש להראות כי

$$\forall j,\forall t\ge 0,\nu_j=\sum_k \nu_k P_t^{kj}.$$

נתחיל בצד ימין:

$$\nu_k = E_0\left[\int_0^{R_0} 1_{X_s=k}\,ds\right] = E_0\left[\int_0^{\infty} 1_{X_s=k}1_{s\le R_0}\,ds\right]$$

$$\forall s, P_t^{kj} = P_0\left[X_{t+s} = j \mid X_s = k\right]$$

כלומר

$$\sum\nolimits_k \nu_k P_t^{kj} = \sum\nolimits_k E_0\left[\int_0^{\infty} 1_{X_s=k}1_{s\le R_0}\,ds\right] P_t^{kj} =$$

$$\int_0^{\infty} \sum\nolimits_k E_0\left[1_{X_s=k}1_{s\le R_0}\right] P_t^{kj} ds =$$

$$\int_0^{\infty} \sum\nolimits_k P_0\left[X_s = k \wedge s \le R_0\right] P_0\left[X_{t+s} = j \mid X_s = k\right] ds$$

הביטוי $s \le R_0$ תלוי בשרשרת לפני s השני אחרי. לכן

$$= \int_0^{\infty} \sum\nolimits_k P_0\left[X_s = k \wedge s \le R_0\right] P_0\left[X_{t+s} = j \mid X_s = k \wedge s \le R_0\right] ds =$$

$$\int_0^{\infty} \sum\nolimits_k P_0\left[X_{t+s} = j \wedge X_s = k \wedge s \le R_0\right] ds =$$

$$\int_0^{\infty} P_0\left[X_{t+s} = j \wedge s \le R_0\right] ds = \int_0^{\infty} E_0\left[1_{X_{t+s}=j}1_{s\le R_0}\right] ds =$$

$$E_0\left[\int_0^{R_0} 1_{X_{t+s}=j}\,ds\right] = E_0\left[\int_t^{t+R_0} 1_{X_s=j}\,ds\right] = E_0\left[\int_t^{R_0} 1_{X_s=j}\,ds\right] + E_0\left[\int_{R_0}^{t+R_0} 1_{X_s=j}\,ds\right]$$

אבל, לפי תכונת מרקוב החזקה

$$E_0\left[\int_{R_0}^{t+R_0} 1_{X_s=j}\,ds\right] = E_0\left[\int_0^{t} 1_{X_s=j}\,ds\right]$$

ולכן

$$= E_0\left[\int_0^{t} 1_{X_s=j}\,ds\right] + E_0\left[\int_t^{R_0} 1_{X_s=j}\,ds\right] = E_0\left[\int_0^{R_0} 1_{X_s=j}\,ds\right] = \nu_j$$

<u>הגדרה:</u>

מצב נקרא חולף אם $P(R_i < \infty) < 1$, אחרת חוזר.

מצב חוזר נקרא חוזר ריק (null recurrent) אם $E_i[R_i] = \infty$.

מצב חוזר נקרא חוזר חיובי (positive recurrent) אם $E_i[R_i] < \infty$.

<u>הגדרה:</u> שרשרת נקראת ארגודית אם היא בלתי פריקה וחוזרת חיובית.

<u>משפט:</u> בשרשרת ארגודית $\nu_i = \dfrac{1}{E_i[R_i]}$.

הוכחה כמו במקרה הבדיד.

<u>משפט:</u> בשרשרת ארגודית $\lim_{t\to\infty} P_t^{ij} = \nu_j$.

הוכחה: משתמשים בשרשרת הטמונה.

<u>משפט</u>: בשרשרת ארגודית, בהסתברות 1 מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds=\sum_i f(i)\nu_i .$$