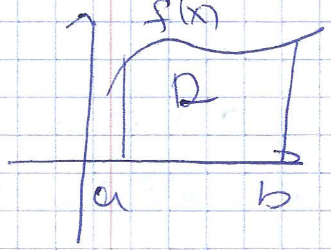
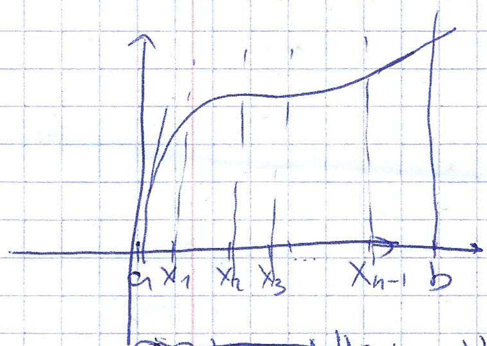
(1) נגדיר את שטח של D באופן אנלוגי, בעזרת של שטחים של תחומים פשוטים שסכומם ידועים.

אני מתחיל ~~הגדרה~~ שטח מלבן הוא מכפלת אורכו ברוחבו ושטח של תחום המורכב ממלבנים הוא סכום שטחי המלבנים המרכיבים תחום זה.

נשתמש בהגדרות אלו, כבסיס להגדרת שטח של תחום D מהצורה ⇐



- נבחר מספר טבעי n כלשהו ונחלק את הקטע $[a,b]$ ל n ~~תתי~~ תתי קטעים באורך כלשהו על ידי לאיחוד החלוקה (סמן n-1) נקודות $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$



- נקודות חלוקה אלו יוצרות חלוקה אחידה של הקטע $[a,b]$
- נעביר את האנכים בנקודות $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$

כדי לחלק את התחום D ל- n רצועות ~~שטח הרוחב~~ שבהן רוחב $|x_i - x_{i-1}|$

- כעת אנו רוצים למצוא דירוג לשטח של כל רצועה באמצעות שטח של מלבן. אנו בוחרים לשם כך נקודה כלשהי בכל תת קטע, נניח $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$

ובונים מעל כל תת קטע מלבן שגובהו הוא ערך הפונקציה f בנקודה שנבחרה שרירותית. האיחוד של מלבנים אלו יוצר תחום D_n, שאותו נוכל לראות כקירוב סביר לתחום השלם D. את שטח התחום המדרגות ניתן לחשב ע"י סיכום השטחים של המלבנים

נניח שמחלקים קטע $[a,b]$ ל n תת קטעים באורך $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ כל n הקטעים האלה שווים, שהרי מהווים חלוקה של הקטע $[a,b]$. האורך של הקטע הגדול בחלוקה זו נקרא פרמטר החלוקה והוא מסומן כך: $\max \Delta x_k$

הרי המקסימום של Δ_k-ים.

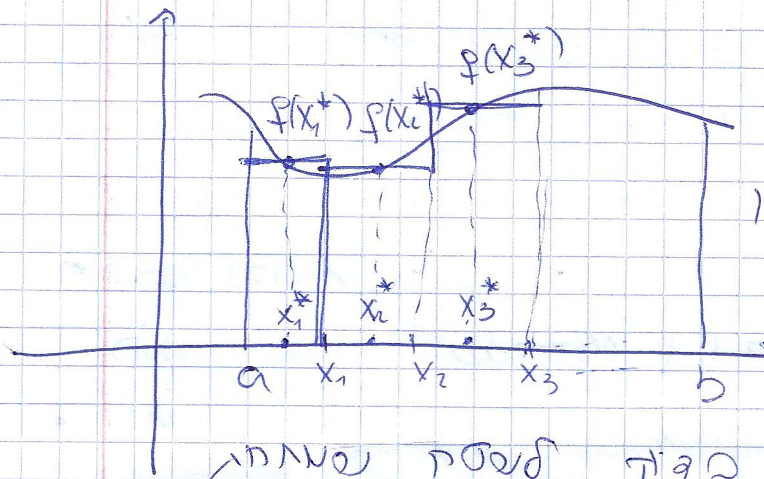
נניח שהקטע $[a,b]$ מחולק ל n תת-קטעים. אם x^* הוא נקודה כלשהי בתת קטע ה-k-י, אז המכפלה

$$f(x_k^*)\Delta x_k$$

מייצגת שטח של מלבן שגובהו $f(x_k^*)$ ורוחבו Δx_k, ולכן הסכום:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

הוא סכום שטחי המלבנים המוארים



אם נגדיל את n כך ש $\max\Delta x_k \to 0$ רוחבו של כל אחד מהמלבנים ישאף לאפס, שכן אין מלבן שרוחבו עולה על $\max\Delta x_k$!

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ ישאף בסוף לשטח שמתחת לגרף. (נסמן את התחום ב- כך:

$$A=\lim_{\max\Delta x_k\to0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

~~(נוסח~~ ~~הגדרה:~~ (שטח מתחת לגרף)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אם $f(x)\ge0$ לכל x ב-$[a,b]$, אז השטח שמתחת לגרף $y=f(x)$ ומעל לקטע $[a,b]$ מוגדר ע"י:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{A}_{\text{השטח שמתחת לגרף}}=\lim_{\max\Delta x_k\to0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k}_{\text{סכום רימן}}$$

~~(נוסח לחישוב שטח)~~

נוסחה לחישוב שטח בין שתי פונקציות:

$$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$$

$$A=\int_c^d [w(y)-v(y)]\,dy$$

חישוב נפחים

נוסחה לנפח הגוף שנוצר מסיבוב של
פונקציה $f(x)$ סביב ציר ה-x:

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

נוסחה מוכללת

$$V=\int_a^b \pi\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

נוסחה לנפח הגוף שנוצר מסיבוב של פונקציה $u(y)$
מסביב לציר ה-y היא:

$$V=\int_c^d \pi[u(y)]^2\,dy$$

$$V=\int_c^d \pi\left([u(y)]^2-[v(y)]^2\right)dy$$

נוסחה נוספת לחישוב נפח גוף ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ שנוצר
כתוצאה מסיבוב של $f(x)$ סביב ציר ה-y:

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

נוסחה לאורך הקשת

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$L=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

שיעור חזרה

האינטגרל המסוים:

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת ~~[illegible]~~:

א.
$$b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\cdot e^{\frac{i^2}{n^2}}$$

__פתרון:__ $b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\cdot e^{\frac{i^2}{n^2}}$ זה בדיוק סכום רימן

בקטע $[0,1]$ עבור פונקציה $x\cdot e^{x^2}$ עם חלוקה

$1, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots, 1$ עם פרמטר החלוקה $\frac{1}{n}$

הסכום של סכומי רימן, כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס הוא האינטגרל המסוים בקטע.

לסיכום:

$$b_n \to \int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

ב. הוכח כי [illegible]:

$$a_n = \sum_{i=1}^{2^n} \sin\frac{i}{2^{2n}}\cdot\cos\frac{i}{2^{2n}}\cdot\cos\frac{i}{2^{2n-1}}\cdots\cos\frac{i}{2^{n+1}}$$

__פתרון:__ הסכום הזה ניתן לרשום

$$\sin\frac{i}{2^{2n}}\cdot\cos\frac{i}{2^{2n}}\cdot\cos\frac{i}{2^{2n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{i}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\cdot\sin\frac{i}{2^n}$$

$1\le i\le 2^n$, לכן נקבל:

$$a_n = \sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2^n}\sin\frac{i}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\sin\frac{i}{2^n}$$

וזהו סכום המתאים לפונקציה $\sin x$ בקטע $[0,1]$ עם חלוקה שנקודותיה הן הנקודות:

$$\left\{\frac{i}{2^n}\ \middle|\ 1\le i\le 2^n\right\}$$

ומכאן נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \sin x\,dx = 1-\cos(1)$$

2

ב.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}$$

פתרון: נרשום את הביטוי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{n}$$

נשים לב שלמספר n חוסר

$$\sin\frac{n\pi}{n} = 0$$

נבחר $f(x) = \sin x$ בקטע $[0,\pi]$.

$f(x)$ רציפה בקטע ולכן אינטגרבילית בו.

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{n} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$ כאשר $0 \le k \le n$

$$\Delta x = \frac{\pi}{n}, \quad x_k^* = \frac{\pi k}{n} \in [x_{k-1}, x_k], \quad x_k = \frac{\pi k}{n}$$

ולכן לפי הגדרת האינטגרל המסוים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{n} = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -(-1-1) = 2$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}}$$

פונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0,1]$

ולכן אינטגרבילית בו ולכן נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

שימוש נוסף של אינטגרל מסוים כפונקציה

נגזרות:

1.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = f(x)$$

2.

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$

תרגיל: חשב את הגבולות הבאים:

א.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2\,dt}{x^6}$$

פתרון: הגבול הוא מהצורה $\frac{0}{0}$ ולכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2\,dt}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x^4}{6x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

ב.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{3x} = \frac{2}{3}$$

ג.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\int_\pi^x \cos^2 t\,dt}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2 x}{1} = 1$$

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t\,dt}{\cos t}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\cos x}}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\sin x\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(1+\cos 2x)} =$$

(4)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos(2x)+\sin x(-2\sin 2x))} = \frac{1}{2}$$

ה)

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{x^2} \tan(t-\frac{\pi}{3})\,dt}{(x^2-\frac{\pi}{3})^2}$$

פתרון: גבול מסוג $\frac{0}{0}$ ~~לופיטל~~
(נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{x^2} \tan(t-\frac{\pi}{3})\,dt}{(x^2-\frac{\pi}{3})^2} = \lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{2x\tan(x^2-\frac{\pi}{3})}{(x^2-\frac{\pi}{3})\cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{\tan(x^2-\frac{\pi}{3})}{2(x^2-\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{\sin(x^2-\frac{\pi}{3})}{(x^2-\frac{\pi}{3})}\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\cos(x^2-\frac{\pi}{3})^2} = \frac{1}{2}$$

ו) ~~תרגיל~~

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\pi/2}^{x} \ln(\sin t)\,dt}{\cos^2 x}$$

פתרון: גבול מסוג $\frac{0}{0}$, (נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \ln(\sin t)\,dt}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{-2\sin x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{-\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x\cdot 2\cos 2x} = 0$$

תרגיל: חשבו את ערך של π בדיוק של עד כדי
שגיאה שאינה עולה על 0.02.

פתרון: נעזר בפיתוח טיילור של $\arctan x$:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}$$

ידוע כי: $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

מה שעלינו הוא להציב $\frac{1}{\sqrt{3}}$ בטור טיילור של arctanx, בסביבת ה-נקודה 0 יש לשים לב את תחום ההתכנסות של הטור, ולבדוק האם מותר להציב בו $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot 2n+3=1$$

תחום ההתכנסות כולל בדיקת קצוות $[-1,1)$

וגם $\frac{1}{\sqrt{3}}\in[-1,1)$.

לאחר הצבה נקבל:

$$\frac{\pi}{6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

נכפיל את שני האגפים ב 6 ונקבל:

$$\pi=\frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}$$ טור לייבניץ

נשתמש במשפט לייבניץ כדי להעריך את השארית:

$$|\pi-S_m|\le|a_{m+1}|=\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{2n+4}$$

נציב $n=2$ ונקבל ש:

$$|a_{m+1}|\approx 0.0183<0.02$$

תרגיל: מצא נקודות קיצון של הפונקציה $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ בתחום $x>0$.

פתרון: $F'(x)=\frac{\sin x}{x}=0$ לכן $x=\pi n,\ n\in\mathbb{N}$

הנקודות חשודות. נבדוק את סוג הקיצון לפי הנגזרת השנייה:

$$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ \Leftarrow\ F''(\pi n)=(-1)^n\cdot\frac{1}{\pi n}$$

אם $k\in\mathbb{N}$, $n=2k-1$ אזי $f''(x)<0$

ולכן $x=\pi(2k-1)$ נקודות מקסימום

אם $k\in\mathbb{N}$, $n=2k$ אזי $f''(x)>0$ ולכן

$x=2k\pi$ נקודות מינימום.

<u>שאלה:</u> נתון ש- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ הוא טור חזקות

מתכנס בקטע $(-1,1)$ ומתבדר בנק' $x=\pm 1$, חשבו

את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $g(x)=f(2x)$

ב. $h(x)=f(\frac{x}{3})$

ג. $k(x)=f(x^2)$

<u>פתרון:</u> ראו (נוסמאות כלומר: שאם $\{a_n\}$ סדרה

של מספרים חיוביים או מה סוי עוזי אז

$\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n$ וגם $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

כיוון שהטור מתכנס בקטע $(-1,1)$ ומתבדר בנקודות

$x=\pm 1$, נובע שרדיוס התכנסות שלו שווה ל- 1.

לפי נוסחת קושי-הדמר אזי $\lim_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=1$

<u>פתרון לא'</u>

נתון ש:

$$g(x)=f(2x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\cdot c_n\cdot x^n$$

לפי נוסחת קושי-הדמר רדיוס התכנסות R

של g שווה ל:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|2^n\cdot c_n|^{1/n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty} 2\cdot c_n^{1/n}}=\frac{1}{2\lim_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}=\frac{1}{2}$$

<u>פתרון לב'</u>

כמו בסעיף הקודם ניתן להשתמש בנוסחת קושי-הדמר

למציאת רדיוס התכנסות. אך בין פעמים נפתח פתרון

למציאת רדיוס התכנסות הוא לשים לב שהטור של $f(x)$

⑦ מכאן רק כאשר $|x|<1$ ולכן הטור $h(x)=f(\frac{x}{3})$
מכאן רק כאשר הארגומנט של f הוא קטן ממש
קטן מאחד, כלומר כאשר $|\frac{x}{3}|<1$ אז $|x|<3$
לכן רדיוס ההתכנסות הוא 3.

<u>פתרון לסעיף</u>

אם כך, ניתן למצוא את רדיוס ההתכנסות באופן פורמלי ובאופן פחות פורמלי. עבור הפונקציה k נובע ש-

$$k(x)=f(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{2n}$$

ולכן $k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ כאשר:

$$a_n=\begin{cases}c_{n/2}, & \text{זוגי } n\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

לכן רדיוס ההתכנסות R של k הוא:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|c_{n/2}|^{\frac{1}{n}}}\overset{[n=2m]}{=}\frac{1}{\lim_{m\to\infty}|c_m|^{\frac{1}{2m}}}=$$

$$=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt{|c_m|^{1/m}}}=\frac{1}{\sqrt{\lim_{m\to\infty}|c_m|^{1/m}}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

אם הטור מתכנס כאשר $x^2<1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1.

<u>הערה:</u> ניתן להשתמש בנוסחת סטירלינג $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ כאשר בודקים פונקציה עצרת מופיעה במקדמים של טור החזקות.

<u>פתרונות:</u>

A. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}x^n$$

<u>פתרון:</u> נעזר בנוסחת סטירלינג:

$$\frac{n^n}{n!3^n}\sim\frac{n^n}{(\frac{n}{e})^n3^n}=\frac{e^n}{3^n}=(\frac{e}{3})^n$$

(8) לכן, מהנוסחה לחישוב רדיוס התכנסות (דל):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^n}{\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}=\frac{3}{e}$$

לכן הטור מתכנס בתחום $\left(-\frac{3}{e},\frac{3}{e}\right)$

הוא לא מתכנס בקצוות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n x^n$

לא מתכנס בקצוות.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}(x-4)^n$

<u>פתרון</u>: אם כדאי לנו להשתמש בנוסחת סטירלינג אך נוח יותר לפי פשוט להשתמש במבחן דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{(2n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(2n+3)(2n+2)=$$

$$=\infty$$

לכן הטור מתכנס לכל x.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}x^n$

<u>פתרון</u>: לפי נוסחת סטירלינג:

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\sim\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{n}{e}\right)^n}=\frac{\frac{2^{2n}\cdot n^{2n}}{e^{2n}}}{\frac{n^{2n}}{e^{2n}}}=2^{2n}=4^n$$

מהנוסחה לחישוב רדיוס התכנסות (דל):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

לכן הטור מתכנס בתחום $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ (קוח)

לא מתכנס בקצוות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}4^n x^n$

לא מתכנס בקצוות.

חשבו את הסכומים הבאים:

א.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$$

פתרון: רדיוס ההתכנסות הוא 1 ולכן ניתן לעשות אינטגרציה איבר-איבר ונקבל שלכל $|x|<1$ מתקיים:

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)t^{2n-2}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\int_0^x t^{2n-2}\,dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}=\frac{x}{1+x^2}$$

ולכן ע"י גזירה של שני האגפים נקבל שלכל $|x|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

ב.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n}{2^n}$$

פתרון: נזכיר כי $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ שנכונה לכל $|x|<1$. ע"י גזירה איבר-איבר והכפלה ב-x של שני האגפים נקבל את הזהות

$$(*)\quad \sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

באותו $|x|<1$. ע"י גזירה והכפלה ב-x של שני האגפים של $(*)$ נקבל את הזהות:

$$(**)\quad \sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

שנכונה בתחום $|x|<1$. לכן ע"י חיבור של $(*)$ עם $(**)$ נקבל שלכל $|x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n)x^n=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

במקרה שלנו $x=\frac{1}{2}$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n}{2^n}=8$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$.

פתרון: (רעיון) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$

קל לבדוק שלטור יש רדיוס התכנסות אחד.

לכן מותר לגזור איבר איבר לכל $|x|<1$.

מקבלים:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)}$$

כי חילוק של טור חזקות של המשוואה ב-x

וגזירה של טור חזקות לכל $|x|<1$ מותר לגזור:

$$\left(\frac{S'(x)}{x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x^{2n-1})'}{(2n-1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$$

כי אינטגרציה של טור חזקות

של המשוואה מתכנסת לכל $|x|<1$

$\frac{S'(x)}{x}=\arctan x$. כי הכפל ב-$x$ מותר.

(ולכן לכל):

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x t\arctan(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left((1+x^2)\arctan x-x\right)$$

הראנו נכונות לכל $|x|<1$. נשאר לבדוק

את הגבול $x\to1^-$ במובן טור חזקות של המשוואה

המסקנה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{2}\left((1+x^2)\arctan x-x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

תרגיל: פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור: (11)

א. $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$ סביב $x=-1$

פתרון:

$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\qquad\left(|x+1|<\sqrt{2}\right)$$

ב. $f(x)=\cos x$ סביב $x=\frac{\pi}{4}$

פתרון:

$$\cos(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}-\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\quad(|x|<\infty)$$