תרגול 1

האינטגרל הלא מסוים

הגדרה

פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בתחום D, אם עבור כל x בתחום D מתקיים $F'(x)=f(x)$.

הערה

אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז גם $F(x)+c$, כאשר c מספר קבוע, היא פונקציה קדומה של $f(x)$ מכיוון ש $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$. קיבלנו שלפונקציה $f(x)$ יש אינסוף פונקציות קדומות.

דוגמא

הפונקציה $F(x)=x^2$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$ מכיוון ש $F'(x)=f(x)$.

הפונקציה $F(x)=x^2+1$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$ מכיוון ש $F'(x)=f(x)$.

באופן כללי הפונקציה $F(x)=x^2+c$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$ מכיוון ש $F'(x)=f(x)$.

תרגיל

הוכח שהפונקציה $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$ היא קדומה ל $\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$.

פתרון

נסמן $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ צריך להוכיח ש $F'(x)=f(x)$.

$$F'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

הגדרה

תהי $f(x)$ בעלת פונקציה קדומה $F(x)$. אוסף כל הפונקציות הקדומות $F(x)+C$ של $f(x)$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$, אותו נסמן $\int f(x)dx=F(x)+c$.

תכונות האינטגרל הלא מסוים

1. אם $f(x)$ גזירה אזי $\int f'(x)dx=f(x)+c$.
2. לכל קבוע a מתקיים $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.
3. האינטגרל של הסכום (או ההפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

טבלה של אינטגרלים מיידים

$F(x)$	$f(x)$	
$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)}+C$	$(ax+b)^n$ $n\neq -1$	1.
$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$	$\frac{1}{ax+b}$	2.
$-\cos x+C$	$\sin x$	3.
$\sin x+C$	$\cos x$	4.
$\tan x+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	5.

6.	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
7.	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
8.	e^x	e^x
9.	$\dfrac{1}{x^2 + a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$
10.	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a} + C$
11.	$\sinh x$	$\cosh x + C$
12.	$\cosh x$	$\sinh x + C$

<u>הערה 1</u>

אם $\int f(x)dx = F(x) + C$ אז $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

הסבר:

מכיוון ש $\int f(x)dx = F(x) + C$ נקבל ש $f(ax+b)$.

מכלל השרשרת ומכיוון ש $(ag(x))' = ag'(x)$ נקבל ש

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot\left(F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot(ax+b)'\cdot f(ax+b) = \frac{1}{a}\cdot a\cdot f(ax+b) = f(ax+b).$$

<u>הערה 2</u>

תפקידו של dx ברישום $\int f(x)dx$ הוא שביצוע האינטגרל הוא עבור המשתנה x.

למשל: $\int (x^2+s)dx = \frac{x^3}{3} + sx + C, \int (x^2+s)ds = x^2 s + \frac{s^2}{2} + C$

<u>דוגמאות לשימוש באינטגרלים מיידים</u>

1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ כאשר $n \neq -1$.

דוגמא: $\int (3x+2)^3 dx = \frac{(3x+2)^4}{3\cdot 4} = \frac{(3x+2)^4}{12}$.

2. $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$.

דוגמא: $\int \frac{1}{5x+2}dx = \frac{\ln|5x+2|}{5} + c$.

3. $\int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m\ln a} + c$ כאשר $a > 0, a \neq 1$.

דוגמא: $\int 2^{4x+1}dx = \frac{2^{4x+1}}{4\ln 2} + c$.

4. $\int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$, $\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$.

דוגמא: $\int \sin(3x+\pi)dx = \frac{-\cos(3x+\pi)}{3} + c$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{tg(ax+b)}{a} + c$, $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{ctg(ax+b)}{a} + c$.

6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + c$.

<u>חישוב אינטגרלים בעזרת האינטגרלים המיידים</u>

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sin^2 x dx$ ב. $\int \left(1+\sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx$ ג. $\int \frac{2x^3+x^2+1}{x^3} dx$ ד. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

<u>פתרון</u>

א. נשתמש בזהות $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x.$$

ב.

$$\int \left(1+\sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx = \int \left(1+x^{\frac{5}{4}}\right)^2 dx = \int \left(1+2x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{10}{4}}\right) dx = x + \frac{2x^{\frac{9}{4}}}{9/4} + \frac{x^{\frac{14}{4}}}{14/4} + c = x + \frac{8x^{\frac{9}{4}}}{9} + \frac{2x^{\frac{14}{4}}}{7} + c$$

ג.

$$\int \frac{2x^3+x^2+1}{x^3} dx = \int \left(2+\frac{1}{x}+x^{-3}\right) dx = 2x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2}.$$

ד.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

<u>חישוב אינטגרלים בשיטת ההצבה</u>

<u>משפט</u>

תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע מסוים I, ותהי $\phi(t)$ פונקציה גזירה בקטע מסוים J, כך שלכל $t \in J$ מתקיים $\phi(t) \in I$. אזי $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c$.

<u>דוגמא</u>

$\int \frac{2x}{1+x^2} dx$. נבחר בהצבה $x = \phi(t) = \sqrt{t}$ אזי $t = x^2$ ו $dt = 2xdx$.

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| = \ln\left(1+x^2\right).$$

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \tan x dx$ ב. $\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx$ ג. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$.

<u>פתרון</u>

א. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ נציב $t = \cos x$ ואז $dt = -\sin x dx$.

$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$.

ב. $\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

עבור המחובר השני ניתן להשתמש בנוסחה $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$ ולקבל

$2\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$.

נשאר לחשב את האינטגרל של המחובר הראשון $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

עבור המחובר הראשון נשתמש בשיטת ההצבה:

נציב $t = x^2$ ואז $dt = 2xdx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right).$$

סה"כ נקבל

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right).$$

ג. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{e^x + \cancel{1/e^x}}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$.

נציב $t = e^x$ ואז $dt = e^x dx$.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t = \arctan e^x.$$

<u>חישוב אינטגרלים הכוללים פונקצית שורש</u>

<u>תרגיל</u>

פתור את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$. ב. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}dx$ ג. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$

<u>פתרון</u>

א.

נציב $x = t^2$ ואז $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \frac{t\cdot 2t}{1+t^2}dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$
$$2\left(\int 1dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt\right) = 2t - 2\arctan t = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$$

ב.

נציב $t = 1+\sqrt{x+2}$ ואז

$\sqrt{x+2} = t-1 \Rightarrow x+2 = (t-1)^2 \Rightarrow x = (t-1)^2 - 2 \Rightarrow dx = 2(t-1)dt$.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}dx = \int \frac{2t-2}{t}dt = \int 2dt - \int \frac{2}{t}dt = 2t - 2\ln|t| = 2 + 2\sqrt{x+2} - 2\ln\left(1+\sqrt{x+2}\right) + c$$

ג.

נציב $x=t^4$ ואז $dx=4t^3dt$

$\int\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx=\int\frac{t^4\cdot4t^3}{t^2+t}dt=\int\frac{4t^6}{t+1}dt$ נבצע חלוקת פולינומים ונקבל ש

$\frac{t^6}{t+1}=t^5-t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}$ ומכאן קל להמשיך....

<u>תרגיל</u>

תעבור לביטוי רציונאלי בחישוב של האינטגרל $\int\frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

<u>פתרון</u>

המחלק המשותף המינימאלי של $2,4,3$ הוא 12 ולכן נציב $x+2=t^{12}\Leftarrow dx=12t^{11}dt$

$\int\frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}dx=\int\frac{t^6\cdot12t^{11}}{1+t^3+t^4}dt=\int\frac{12t^{17}}{1+t^3+t^4}dt$.

<u>אינטגרציה לפי חלקים</u>

נניח ש u,v הן פונקציות של x על פי כלל הגזירה של מכפלת פונקציות נקבל ש $(uv)'=u'v+uv'$

ולכן $uv'=(uv)'-u'v$

מכאן נקבל את הנוסחה הבאה: $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$.

<u>תרגיל</u>

חשב בעזרת אינטגרציה בחלקים את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\arctan xdx$ ב. $\int\ln xdx$ ג. $\int e^x\cos xdx$ ד. $\int x^2\cos\frac{x}{2}dx$.

<u>פתרון</u>

א.

נסמן $u=\arctan x$, $v'=1$ ואז $u'=\frac{1}{1+x^2}$, $v=x$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ ונקבל

$\int\arctan xdx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

נבחר בהצבה $t=x^2$ ואז $dt=2xdx$.

$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}\ln|1+t|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

ב.

נסמן $u=\ln x$, $v'=1$ ואז $u'=\frac{1}{x}$, $v=x$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ ונקבל

$\int\ln xdx=x\ln x-\int1dx=x\ln x-x+c$.

ג.

נסמן $\begin{matrix} u=e^x \\ v'=\cos x \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u'=e^x \\ v=\sin x \end{matrix}$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$(1)\int e^x \cos xdx = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$.

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x \sin xdx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

נסמן $\begin{matrix} u=e^x \\ v'=\sin x \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u'=e^x \\ v=-\cos x \end{matrix}$.

$\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx$. נציב במשוואה (1) ונקבל

$\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx \Rightarrow 2\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x$

$$\int e^x \cos xdx = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x$$

ד.

נסמן $\begin{matrix} u=x^2 \\ v'=\cos\frac{x}{2} \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u'=2x \\ v=2\sin\frac{x}{2} \end{matrix}$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$(1)\int x^2 \cos\frac{x}{2}dx = 2x^2 \sin\frac{x}{2} - \int 4x\sin\frac{x}{2}dx$.

נשאר לחשב את האינטגרל $\int 4x\sin\frac{x}{2}dx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

נסמן $\begin{matrix} u=4x \\ v'=\sin\frac{x}{2} \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u'=4 \\ v=-2\cos\frac{x}{2} \end{matrix}$.

$$\int 4x\sin\frac{x}{2}dx = -8x\cos\frac{x}{2} + \int 8\cos\frac{x}{2}dx = -8x\cos\frac{x}{2} + 16\sin\frac{x}{2}$$

נציב ב (1) ונקבל

$(1)\int x^2 \cos\frac{x}{2}dx = 2x^2 \sin\frac{x}{2} + 8x\cos\frac{x}{2} - 16\sin\frac{x}{2}$.