תרגיל 7

1. תהא $\mathbb{R} \subsetneq A$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

2. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

3. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.

(ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\}\forall n$, $O_n = \{0, ..., n\}$.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.

4. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות פתוחות כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.

5. הוכיחו כי מרחב טופלוגי X הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.

6. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי B_2, הוכיחו כי $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.

7. תהי X קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו-מנייתית (cocountable).כלומרת הקבוצות הפתוחות הן קבוצה ריקה, וקבוצות שהמשלים שלהן הוא בן מניה. האם מרחב זה הוא B_2?

8. (א) יהי X מרחב B_2. הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).כלומר, אם יש אוסף $\mathcal{U}$ של קבוצות פתוחות כך ש$X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{U}} U_i$, אז יש תת קבוצה בת מניה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ כך ש$X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{O}} U_i$.

(ב) יהי X מרחב B_2. הראו שלכל בסיס $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס.