תרגיל:

נתונים המרחבים הבאים:

$$U=sp\left\{(1,2,5,0),(2,2,1,0),(-1,1,9,0)\right\}$$

$$W=sp\left\{(0,1,6,0),(2,4,14,2),(0,-1,-3,0)\right\}$$

מצאו בסיס לחיתוך $U\cap W$.

פתרון:

נציג כל אחד מהמרחבים כאוסף הפתרון של מערכת משוואות ליניאריות הומוגנית. נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה, בעמודה הנוספת נשים וקטור כללי, ונדרג; נדרוש שיהיה פתרון. עבור U:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & x\\ 2 & 2 & 1 & y\\ 5 & 1 & 9 & z\\ 0 & 0 & 0 & w\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & x\\ 0 & -2 & 3 & y-2x\\ 0 & -9 & 14 & z-5x\\ 0 & 0 & 0 & w\end{array}\right)$$

אפשר לראות שאף שורה נוספת לא תתאפס, ולכן כדי שיהיה פתרון נדרוש: $w=0$.

עבור W:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 0 & x\\ 1 & 4 & -1 & y\\ 6 & 14 & -3 & z\\ 0 & 2 & 0 & w\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -1 & y\\ 6 & 14 & -3 & z\\ 0 & 2 & 0 & x\\ 0 & 2 & 0 & w\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -1 & y\\ 0 & -10 & 3 & z\\ 0 & 2 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0 & w-x\end{array}\right)$$

אפשר לראות שאף שורה נוספת לא תתאפס, ולכן כדי שיהיה פתרון נדרוש: $w-x=0$. אם כן:

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4|w=0\right\},W=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4|w-x=0\right\}$$

כעת, החיתוך הוא:

$$U\cap W=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4|\left\{\begin{array}{c}w=0\\ w-x=0\end{array}\right.\right\}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4|\left\{\begin{array}{c}w=0\\ x=0\end{array}\right.\right\}$$

ולכן:

$$U \cap W = \{(0, y, z, 0) \,| y, z \in \mathbb{R}\}$$

כעת, נפרק לפי הסקלרים:

$$U \cap W = \{(0, y, z, 0) \,| y, z \in \mathbb{R}\} = \{(0, y, 0, 0) + (0, 0, z, 0) \,| y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y\,(0, 1, 0, 0) + z\,(0, 0, 1, 0) \,| y, z \in \mathbb{R}\}$$

ולכן:

$$U \cap W = sp\,\{(0, 1, 0, 0)\,, (0, 0, 1, 0)\}$$

הקבוצה $\{(0, 1, 0, 0)\,, (0, 0, 1, 0)\}$ בת"ל, ולכן - בסה"כ - מהווה בסיס של $U \cap W$.

למשל: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}\,, B = \{1, 3, 5\}$. $A\Delta B = \{2, 5\}$. מצד שני, $A^C = \{4, 5, 6\}\,, B^C = \{2, 4, 6\}$ ולכן: $A^C\Delta B^C = \{2, 5\}$.

חוק המשלים:

$$A \backslash B = A \cap B^C$$

כמו כן:

$$A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

נראה ש: $x \in A^C\Delta B^C \iff x \in A\Delta B$. אם כן:

$$x \in A\Delta B \iff x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \iff x \in A \backslash B \vee x \in B \backslash A$$

$$\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \iff \left(x \notin A^C \wedge x \in B^C\right) \vee \left(x \notin B^C \wedge x \in A^C\right)$$

$$\iff \left(x \in B^C \backslash A^C\right) \vee \left(x \in A^C \backslash B^C\right) \iff x \in \left(B^C \backslash A^C\right) \cup \left(A^C \backslash B^C\right) \iff x \in A^C\Delta B^C$$

תרגיל:

מצאו את:

$$\bigcap_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right]$$

אינטואיטיבית, בחיתוך אנחנו מחפשים קטע כמה שיותר קטן (שיהיה מוכל בכולם) - הקצה השמאלי כמה שיותר גדול, הקצה הימני כמה שיותר קטן. באיחוד, אנחנו מחפשים קטע כמה שיותר גדול (שיכיל את כולם) - הקצה השמאלי כמה שיותר קטן, את הקצה הימני כמה שיותר גדול.
כמו כן, כדאי לרשום מפורשות כמה קבוצות ראשונות. למשל, אצלנו:

$$A_2=\left(\frac{1}{2},1\right],A_3=\left(\frac{1}{3},1\right],A_4=\left(\frac{1}{4},1\right],...$$

נשים לב ש: $A_2\subseteq A_n$ לכל n, ולכן:

$$\bigcap_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right]=A_2=\left(\frac{1}{2},1\right]$$

מה יהיה האיחוד?

$$\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right]=(0,1]$$

מצד אחד, $A_n\subseteq(0,1]$ ולכן גם $\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right]\subseteq(0,1]$. מצד שני, לכל $x\in(0,1]$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש: $\frac{1}{n}<x$ ולכן: $x\in\left(\frac{1}{n},1\right]$; לכן גם: $x\in\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right]$.

נתון ש: $|A\Delta B|=2k,|B\Delta C|=2m$, צ"ל: $|A\Delta C|=2n$. ננסה לבטא את $A\Delta C$ באמצעות $A\Delta B,B\Delta C$.
אם $x\in A\Delta C$, יש שני מקרים: $x\in A\wedge x\notin C$, $x\notin A\wedge x\in C$. בכל מצב, נחלק לשני מקרים: $x\in B$ או $x\notin B$.

1. $x\in A\wedge x\notin C\wedge x\in B$. כאן, $x\in B\Delta C\wedge x\notin A\Delta B$.
2. $x\in A\wedge x\notin C\wedge x\notin B$. כאן, $x\in A\Delta B\wedge x\notin B\Delta C$.

3. $B \ni x \wedge C \ni x \wedge A \notin x$. כאן, $x \in A\Delta B \wedge x \notin B\Delta C$.

4. $x \notin B \wedge x \in C \wedge x \notin A$. כאן, $x \in B\Delta C \wedge x \notin A\Delta B$.

בכל מקרה, $x \in (A\Delta B)\,\Delta\,(B\Delta C)$. כלומר, $A\Delta C = (A\Delta B)\,\Delta\,(B\Delta C)$.

כעת, בקבוצות $A\Delta B, B\Delta C$ יש מספר זוגי של איברים. נסמן: $Y = A\Delta B, Z = B\Delta C$. אז:

$$A\Delta C = Y\Delta Z = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$$

כמה איברים יש בהפרש? ב־Y, Z יש $2k + 2m$ איברים, וכל איבר משותף להן "יורד פעמיים" - פעם אחת כי לא רושמים אותו פעמיים באיחוד, ופעם נוספת כי מורידים אותו בחיתוך, ולכן מספר האיברים בהפרש הוא זוגי. ביתר פירוט, אם יש l איברים משותפים, נקבל ש:

$$|(Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)| = 2k + 2m - 2l$$

למשל: $Y = \{1,2,3,4\}, Z = \{1,2,4,8\}$. יש 3 איברים משותפים, יש 8 איברים בשתי הקבוצות בסך הכל, ולכן בהפרש יהיו:

$$8 - 2 - 2 - 2$$

איברים.

אנחנו רוצים לרשום כל מטריצה כך:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & w \\ -z & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & w \\ -z & y-w \end{pmatrix}$$

נקבל 4 משוואות עם 4 נעלמים:

$$\begin{cases} x + z = a \\ w = b \\ -z = c \\ y - w = d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = a + c \\ w = b \\ z = -c \\ y = d + b \end{cases}$$

וסה"כ:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & b \\ c & -b \end{pmatrix}$$