הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

פתרון תרגיל בית מספר 4

<u>שאלה 1</u>(מבחן משנת תשס"ה)

בנקודה $a=(1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה $f(x,y,z)=x\arctan(yz)$ עולה בקצב הגדול ביותר?
הגדירו כיוון זה ע"י ווקטור שאורכו 1. כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון הזה.

הנגזרות החלקיות הן: $f_x=\arctan(yz),\quad f_y=\dfrac{xz}{1+(yz)^2},\quad f_z=\dfrac{xy}{1+(yz)^2}$. הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בכל נקודה ולכן הפונקציה דיפרנציאבילת שם.

כעת, כיוון העלייה המקסימלי הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל. הגרדיאנט הוא $\nabla f(1,1,1)=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ ולכן ווקטור הכיוון של העלייה המקסימלית הוא:

$$h=\frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}=\frac{\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=(0.743,0.473,0.473).$$

נחשב את הנגזרת המכוונת בכיוון זה: $\partial_h f(1,1,1)=\nabla f(1,1,1)\bullet h=1.056$.

<u>שאלה 2</u>

נתבון בפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. *חשבו את הנגזרות הכיווניות $\dfrac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ (כאשר h ווקטור יחידה כלשהו), במידה וקיימות.*
ב. *בהסתמך על סעיף א' בלבד, הוכיחו כי הפונקציה אינה דיפרנציאבילית (גזירה) בנקודה $(0,0)$.*

א. ניקח וקטור יחידה כלשהו $h=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi)$ (כל וקטור יחידה הוא בהכרח מהצורה הזו).

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+th)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t\cos\theta t^2\sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta}-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

כאשר $\cos\theta=0$ אזי בהכרח $\sin\theta\neq 0$ ולכן $\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=0$.

ב. הנגזרות החלקיות הן הנגזרות הכיווניות בכיוון הצירים, כלומר $h=(1,0),(0,1)$. קל לראות שלפי החישוב הנ"ל הן שוות לאפס. לכן $\nabla f(0,0)=(0,0)$. אם הפונקציה הייתה דיפרנציאבילית היה מתקיים השיוויון $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=<\nabla f(0,0),h>=<(0,0),h>=0$, אבל כפי שראינו בסעיף א' זה לא נכון (למשל עבור $\theta=\frac{\pi}{4}$).

<u>שאלה 3</u>

נתבונן בפונקציה $f(x,y,z)=xy^2z^3$. נתונים ווקטור $h=(4,3,0)$ ונקודה $a=(3,2,1)$.

א. חשבו את הנגזרת של f בנקודה a לפי הווקטור h

ב. חשבו את הנגזרת של f בנקודה a לפי <u>כיוון</u> הווקטור h (נגזרת כיוונית)

א.

הנגזרת בכיוון h שווה ל:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(3+4t,2+3t,1)-f(3,2,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(3+4t)(2+3t)^2\cdot 1^3-3\cdot 2^2\cdot 1^3}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(3+4t)(2^2+12t+9t^2)-3\cdot 2^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{3\cdot 2^2+36t+27t^2+16t+48t^2+36t^3-3\cdot 2^2}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}52+51t+36t^2=52$$

ב.

הנגזרת הכיוונית, הינה הנגזרת בכיוון הוקטור המנורמל $\frac{h}{\|h\|}=\frac{1}{5}(4,3,1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\frac{h}{\|h\|})-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(3+\frac{4}{5}t,2+\frac{3}{5}t,1)-f(3,2,1)}{t}=\frac{52}{5}$$

דרך נוספת הינה לשים לב שהפונקציה דיפרנציאבילית, ולכן מתקיים $df_a\left(h\right)=\frac{\partial f}{\partial h}\left(a\right)$ ולכן ההעתקה מווקטור לנגזרת בכיוון אותו ווקטור הינה העתקה לינארית.

<u>שאלה 4</u> (שאלה ממבחן תשס"ה)

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *ע"י:* $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\gamma}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$.

א. הפונקציה f דיפרנציאבילית (גזירה) בנקודה $\left(0,0\right)$ אם ורק אם:

1. $\gamma<\frac{1}{4}$
2. $\gamma<\frac{1}{2}$
3. $\gamma<1$
4. $\gamma>\frac{1}{2}$

בחרו את התשובה הנכונה והוכיחו את תשובתכם/ן! (<u>הערה</u>: כדאי להשתמש בקואורדינטות פולריות).

ב. מצאו את $df_{(0,0)}\left(h\right)$ עבור ערכי γ בהם הפונקציה דיפרנציאבילית.

א.

$f(x,0)=f(0,y)=0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R},$ מכאן $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$$\varepsilon(h_1,h_2)=\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f_x(0,0)h_1-f_y(0,0)h_2}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}=\frac{h_1h_2}{\left({h_1}^2+{h_2}^2\right)^{\gamma}\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}$$

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

f תהיה דיפרנציאבילית אם ורק אם $\lim_{h=(h_1,h_2)\to 0} \varepsilon(h_1,h_2)=0$. אם נעבור לקואורדינטות קוטביות

נקבל ש f תהיה דיפרנציאבילית אם ורק אם $\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^{2\gamma+1}}=\lim_{r\to 0} r^{1-2\gamma}\cos\theta\sin\theta=0$

אבל זה קורה אם ורק אם מתקיים (*) $1-2\gamma>0$ כלומר אם"ם $\frac{1}{2}>\gamma$.

הסבר ל(*) אם $1-2\gamma>0$ הטענה ברורה כי מקבלים פונקציה השואפת לאפס כפול חסומה. אם $1-2\gamma\le 0$ אזי ניתן להראות שהגבול אינו אפס ע"י לקיחת המסלול $\theta=\frac{\pi}{4}$ למשל).

ב. הנגזרות החלקיות התאפסו וכך גם הדיפרנציאל: $df_{(0,0)}(h)=0$.

<u>שאלה 5</u> (שאלה ממבחן תשנ"ז)

מצאו $dg_a(h)$ עבור $g=\phi\circ f$, $a=(1,1)$, $h=\left(3,\frac{1}{2}\right)$ כאשר:

$$\phi(u,v)=\left(u+v,2u,v^2\right)\ ,\ \ f(x,y)=\left(x^2+xy+1,y^2+2\right)$$

השתמשו בכלל השרשרת והצדיקו את השימוש בכלל זה!

קל לוודא שכל הרכיבים של שתי הפונקציות דיפרנציאבילים (כי הנגזרות החלקיות שלהם קיימות ורציפות) ולכן שתי הפונקציות דיפרנציאביליות, ולכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת.

$J_\phi(u,v)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&2v\end{pmatrix}, J_f(x,y)=\begin{pmatrix}2x+y&x\\0&2y\end{pmatrix}$. לכן $J_g(a)=J_\phi(f(a))J_f(a)$.

$f(a)=f(1,1)=(3,3)$ ולכן סה"כ מקבלים $J_g(a)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&2\cdot 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cdot 1+1&1\\0&2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}$

מטריצת יעקובי היא המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי של הדיפרנציאל, ולכן

$$dg_a(h)=J_g(a)h=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10.5\\19\\6\end{pmatrix}$$

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

<u>שאלה 6</u> (שאלה ממבחן תשס"ה)

חשבו את מטריצת יעקובי ב- $(0,0)$ *של הפונקציה* $g := f\circ\phi$ *באשר*
$\phi(x,y)=\left(\frac{1}{2}\left(e^y+\cos x\right),\frac{1}{2}\left(e^x+\cos y\right)\right)$ *ונתון ש-* f *דיפרנציאבילית בנקודה* $(1,1)$ *ומטריצת*
יעקובי שלה בנקודה זו היא $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

השתמשו בכלל השרשרת והצדיקו את השימוש בכלל זה!

שוב קל לראות שהנגזרות החלקיות של הרכיבים קיימות ורציפות ולכן ϕ דיפרנציאבילית.
$\phi(0,0)=(1,1)$, ונתון ש f דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ לכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת בנקודה $(0,0)$.

$$J_g(0,0)=J_f(1,1)J_\phi(0,0)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sin x & e^y\\ e^x & -\sin y\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}=$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$