אלגוריתם למציאת מטריצה המייצגת את ההעתקה בין בסיסים כלשהם

הנה אלגוריתם שמכליל את הדוגמא הקודמת.

יהיו מ"ו V,W והעתקה T בינהם ובסיסים E,F בדיוק כמו בהגדרה לעיל. אזי:

1. מצא את מטריצת המעבר $[I]_S^F$ (קל, לשים את הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי של איברי F בעמודות)
2. הפוך אותה על מנת לקבל את $[I]_F^S$
3. הפעל את ההעתקה T על איברי הבסיס E לקבל $Tv_1, \ldots, Tv_n$
4. שים את הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי של התמונות משלב שלוש בעמודות מטריצה $[T]_S^E$
5. כפול מטריצות על מנת לקבל $[T]_F^E = [I]_F^S [T]_S^E$

$[w]_F$ $[v]_E$

$E = \{v_1 \ldots v_n\}$

$[T]_F^E = \left([Tv_1]_F \ldots [Tv_n]_F \right)$

אלגוריתם למציאת העתקה מפורשת לפי תמונות איברי הבסיס בלבד

תהי T העתקה לינארית הנתונה על ידי התמונות של איברי בסיס $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$. רוצים למצוא את Tv עבור $v \in V$ וקטור כלשהו.

1. נבצע את האלגוריתם לעיל על מנת למצוא את $[T]_S^E$.
2. נכפול במטריצת המעבר על מנת לקבל $[T] = [T]_S^S = [T]_S^E [I]_E^S$
3. מכיוון שכל אלה בבסיס הסטנדרטי, נכפול בוקטור כללי מהמרחב על מנת למצוא לאן הוא נשלח במפורש. $[T][v] = [Tv]$

$T: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$

$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ 2b \end{pmatrix}$

וקטור הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי.

$p(x) = a + bx$

$T(p(x)) = (a+2b) \cdot 1 + 2b \cdot x$

דוגמא

תרגיל. יהיו $V = span\{v_1 = (1,0,-1,1), v_2 = (-2,1,2,0), v_3 = (0,-1,0,1)\}$ ו $W = \mathbb{R}_3[x]$ מ"ו. תהי העתקה T מ V ל W המקיימת $\forall i : Tv_i = w_i$ כאשר

$w_1 = 1 + x$

$w_2 = x^3 + x^2 + x + 1$

$w_3 = 0$

מצא את ההעתקה T במפורש.

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס ל V (צ"ל להראות ש B בת"ל)

הצעד הראשון נמצא $[T]_S^B$

$$[T]_S^B = \left([Tv_1]_S \; [Tv_2]_S \; [Tv_3]_S\right) = \left([w_1]_S \; [w_2]_S \; [w_3]_S\right)$$

סטנדרטי של הפולינום

$[1+x]_S$

$$[T]_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת (לפי האלגוריתם לעיל) נרצה למצוא $[I]_{S_v}^B$. נשים לב ש V הוא לא מ"ו מוכר, ואנו צריכים למצוא בסיס סטנדרטי שיהיה נח לעבוד איתו

* נשים את איברי B בשורות $A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ -v_3- \end{pmatrix}$
* נדרג את המטריצה כיוון $R(A)$ לא משתנה בדירוג, נוכל למצוא בסיס נח יותר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אלטרנטיבי ל V $\quad S = \{(1,0,-1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

$[(x,y,-x,z)]_{S_v} = (x,y,z) \qquad B = \{(1,0,-1,1), (-2,1,2,0), (0,-1,0,1)\}$

$$[I]_{S_v}^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to [I]_B^{S_v} = \left([I]_{S_v}^B\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_S^{S_v} = [T]_S^B [I]_B^{S_v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$[T(-x,y,x,z)]_S = [T]_S^{S_v} [(-x,y,x,z)]_{S_v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y+z \\ \frac{1}{3}(x+y+z) \\ \frac{1}{3}(x+y+z) \end{pmatrix}$$

$$T(-a,b,a,d) = (b+d)\cdot 1 + (b+d)\cdot x + \frac{1}{3}(a+b+d)x^2 + \frac{1}{3}(a+b+d)x^3$$

מחלקת שקילות של מטריצות המייצגות העתקה

טענה: יהא V מ"ו מימד סופי $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. אזי קיים B' בסיס אחר כך ש $A=[I]_B^{B'}$

(במילים: המטריצה A היא מטריצת מעבר מאיזה שהוא בסיס אחר לבסיס הנתון)

על המטריצות הריבועיות $\mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר יחס שקילות באופן הבא: $B\approx A$ אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=P^{-1}BP$.

$A\approx B$

$\exists p$ $\quad A=P^{-1}BP$

נכפול P משמאל, P^{-1} מימין

$B=PAP^{-1}$

יחס זה נקרא "הצמדה".

הוכיחו כי זהו אכן יחס שקילות.

טענה מרכזית

יהא V מ"ו מימד סופי n. תהא $T:V\to V$ ה"ל. ונשתמש בסימון $\approx$ כיחס ההצמדה על המטריצות $\mathbb{F}^{n\times n}$ שהגדרנו לעיל.

מתקיים כי

1. $[T]_B\approx[T]_{B'}$ עבור כל 2 בסיסים B,B'
2. אם $A\approx[T]_B$ עבור B בסיס כל שהוא אזי קיים בסיס B' כך ש $A=[T]_{B'}$

במילים- המטריצה המייצגת של T יחידה עד כדי הצמדה.

כלומר אם נייצג את T ע"י 2 בסיסים נקבל מטריצות צמודות ומאידך גיסא אם יש מטריצה A הצמודה לאיזה שהוא מטריצה מייצגת של T אז גם המטריצה A מייצגת את T

הוכחה:

מציאת גרעין ותמונה עם מט׳ מייצגת

הגדרה. יהי V מ"ו ויהי U תת מרחב שלו. יהי B בסיס לV. אזי **מרחב הקואורדינטות** של U לפי B הינו $[U]_B := \{[u]_B : u \in U\}$. כפי שלמדנו העתקת הקואורדינטות הינה איזומורפיזם ולכן בהנתן מרחב קואורדינטות קל למצוא את המרחב המקורי.

תרגיל.

תהי A מטריצה ו-f פונקציה המוגדרת על ידי כפל במטריצה f(v)=Av. מצא את הגרעין ואת התמונה של f.

$$\ker(f) = N(A) = \{v \in V : Av = 0\}$$

$$Im(f) = C(A)$$

מסקנה. תהי T העתקה לינארית מV לW, עם E וF בסיסים בהתאמה. אזי:

מרחב הקואורדינטות של הגרעין הינו $[kerT]_E = \{[v]_E : Tv = 0\} = \{[v]_E : [Tv]_F = 0 = [T]^E_F [v]_E\} = N([T]^E_F)$.

מרחב הקואורדינטות של התמונה הינו $[ImT]_F = \{[Tv]_F : v \in V\} = \{[T]^E_F \cdot [v]_E : [v]_E \in F^n\} = C([T]^E_F)$

אלגוריתם למציאת Im, Ker

1. מצא מטריצה מייצגת $A=[T]_F^E$
2. מצא את מרחבי הקואורדינטות של הגרעין והתמונה
$N(A)=[kerT]_E, C(A)=[ImT]_F$
3. **העבר חזרה** את מרחבי הקואורדינטות לצורה המקורית (ע"י כפל הסקלרים מהקואורדינטות באיברי הבסיס)

תרגיל

נגדיר ה"ל $T:\mathbb{R}^{2\times 3}\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T(A)=C_1(A)+C_3(A)$ (כאשר $C_i(A)$ פירושו העמודה ה i-ית של A).

1. נגדיר $S=\{e_{1,1},e_{1,2},e_{1,3},e_{2,1},e_{2,2},e_{2.3}\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ ו $B=\left\{\underset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}},\underset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\right\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^2$. מצא את המטריצה המייצגת $[T]_B^S$
2. מצא בסיס לגרעין של T

$$\left([Ts_1]_B\ [Ts_2]_B \ldots\right)=[T]_B^S$$

פתרון

$$Te_{1,1}=T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot b_1+0\cdot b_2\to[Te_{1,1}]_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$Te_{12}=T\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=[Te_{12}]_B$$

$$Te_{13}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to[Te_{13}]=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$Te_{21}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-1b_1+1b_2\to[Te_{21}]=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$[Te_{22}]_B=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad[Te_{23}]_B=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{[T]_B^S=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\ker[T]_B^S=N\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}&t&s&&a&b\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\end{pmatrix}\end{array}=\left\{\begin{pmatrix}-s\\t\\s\\-b\\a\\b\end{pmatrix}\ t,s,a,b\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\ker T=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל. (6.14)

א. מצא בצורה מפורשת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ כך שמתקיים
$Im(T)=span\{(2,4,5,7),(1,2,1,1)\}$

ב. מצא בצורה מפורשת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש
$ker(T)=span\{(1,3,7),(2,5,6)\}$ וגם $Im(T)=span\{(1,2,3)\}$

<u>דרך א'</u>: $T(x,y,z,w)=x(2\,4\,5\,7)+y(1\,2\,1\,1)+z\vec{0}+w\vec{0}$

<u>דרך ב'</u>: מגדירים עפ"י משפט ההגדרה:

$T(1\,0\,0\,0)=(2\,4\,5\,7)$

$T(0\,1\,0\,0)=(1\,2\,1\,1)$

$T(0\,0\,1\,0)=\vec{0}=T(0\,0\,0\,1)$

לאחר מכן כל למצוא את המטריצה המייצגת ולהכפיל אותה בוקטור כללי.

ב) נשלים לבסיס $\{\overset{v_1}{(1,3,7)},\overset{v_2}{(2,5,6)},\overset{v_3}{(0,0,1)}\}$

$Tv_1=0$

$Tv_2=0 \qquad Tv_3=(1,2,3)$