פתרון מבחן מועד א' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 16/02/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.</u>

<u>מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.</u>

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(cos(x))(e^{2x}-1)}{\cos(sin(x))\ln(1+x)}$

$$\underbrace{\frac{\sin(\cos(x))}{\cos(\sin(x))}}_{\to\frac{\sin(1)}{\cos(0)}}\cdot\underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{1}\cdot 2\to 2\sin(1)$$

ב. $\lim_{x\to 1^+}(\ln(x))^{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+}(\ln(x))^{x-1}=\left\{0^0,\text{כלל האילן}\right\}=\lim_{x\to 1^+}e^{\ln\left((\ln(x))^{x-1}\right)}=\lim_{x\to 1^+}e^{(x-1)\ln(\ln(x))}=e^0=1$$

כאשר חישוב הגבול האחרון הוא:

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(\ln(x))=\{0\cdot\ln(0)=0\cdot(-\infty)\}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln(x))}{\frac{1}{x-1}}=\left\{\frac{-\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{-(x-1)^2}{\ln(x)}=0$$

כאשר המעבר האחרון פה הוא:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{\ln(x)}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{1}\right\}=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!+n}{2^n}$

נחשב את שני הגבולות הבאים

$$\frac{n!}{2^n}, \frac{n}{2^n}$$

כעת, $\frac{n}{2^n} \to 0$ לפי משפט סדרי גודל

את הגבול השני נחשב באמצעות כלל המנה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2} \to \infty > 1$$

כיוון שגבול המנה גדול מ1, הסדרה החיובית שואפת לאינסוף

$$\frac{n!}{2^n} \to \infty$$

וסה"כ התשובה לשאלה היא:

$$\frac{n!+n}{2^n} = \frac{n!}{2^n} + \frac{n}{2^n} \to \{\infty + 0\} = \infty$$

הערת העשרה לגבי התרגיל:

נניח והתרגיל היה $\lim \frac{2^n}{n!+n}$ מה היינו עושים?

לאחר התרגיל שפתרנו הרגע, התשובה היא קלה כיוון ש

$$\lim \frac{2^n}{n!+n} = \lim \frac{1}{\frac{n!+n}{2^n}} = \left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0$$

בתרגיל יכלנו לחשב את הגבול של ההופכי ואז להגיע לזה לבד.

אבל בכל זאת אנחנו רוצים כלי נוסף, במיוחד אם גם במונה וגם במכנה יש סכום של כמה גורמים.

אז מה עושים? הוצאת ביטוי משמעותי כגורם משותף

$$\lim \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{n!}} = \{0 \cdot 1\} = 0$$

הביטוי השמאלי שואף לאפס בזכות כלל המנה, והביטוי הימני שואף ל1 די בקלות (במקרים אחרים היה צריך כלל המנה).

2.

א. חשבו את $\int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$.

מדובר באינטגרל על פונקציה רציונאלית.

ראשית נשים לב כי דרגת המונה גדולה (או שווה) לדרגת המכנה, ולכן נתחיל מחילוק פולינומים

$$x$$

$$---$$

$$x^3 + 2|x^2 - 1$$

$$x^3 - x$$

$$x + 2$$

דרגת הביטוי אליו הגענו נמוכה ממש מדרגת הפולינום בו אנו מחלקים ולכן סיימנו את תהליך החילוק.

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

כעת $\int xdx = \frac{x^2}{2}$ נזכור את זה להמשך ונותר האינטגרל

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx$$

הערת צד:

אפשר להשלים את המונה לנגזרת המכנה אבל כאן זה לא הצעד החכם והנכון אלא בזבוז מוחלט של זמן

$$\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2x}{x^2 - 1}}_{\to \ln(|x^2-1|)} + \frac{2}{x^2 - 1}$$

ואת הביטוי הימני נפרק לשברים חלקיים כי אין דרך אחרת.

אז למה לא פירקנו מראש לשברים חלקיים? כי טעינו.

נחזור לתהליך הנכון, ונפרק את הפונקציה הרציונאלית שבידינו, בה דרגת המונה קטנה ממש מדרגת המכנה, לשברים חלקיים.

$$\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1}$$

נשווה מונים

$$x + 2 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

נציב $x = 1$

$$3 = 2A \to A = \frac{3}{2}$$

נציב $x = -1$

$$1 = -2B \to B = -\frac{1}{2}$$

וסה"כ נקבל כי

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

ולכן האינטגרל כולו הוא

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx$.

ראשית נפרק את האינטגרל לשברים חלקיים

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

נציב $x = \pm 1$ ונקבל

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}[\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)] = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

כעת נעבור לאינטגרל הלא אמיתי

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\underbrace{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|}_{\to 1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{2-1}{2+1}\right|\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x = \sin(x)$.

ראשית נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = x - \sin(x)$$

והשאלה היא כמה שורשים יש לפונקציה זו.

$$h'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

לכן הפונקציה עולה ממש בכל הממשיים (כי היא מתאפסת רק בנקודות ולא בתת קטע רצוף).

ולכן אין <u>יותר</u> משורש יחיד, אבל מי אמר שיש שורש בכלל?

כיוון שמדובר בפונקציה רציפה כצירוף של רציפות, נעזר להוכחת קיום שורש במשפט ערך הביניים, כל שעלינו לעשות הוא למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחת לציר.

אפשר במקרה זה ממש להציב נקודות כמו $h(\pi) = \pi - 0 > 0$ וכן $h(-\pi) = -\pi - 0 < 0$

אפשר אפילו להציב $h(0) = 0$ למצוא את השורש ע"י ניחוש.

אבל אם זה לא היה עובד, היינו מחשבים גבולות בקצוות

$$\lim_{x \to \pm\infty} x - \sin(x) = \{\pm\infty - \text{חסומה}\} = \pm\infty$$

סה"כ לפונקציה יש שורש יחיד, ולכן למשוואה המקורית יש שורש יחיד.

ב. מה הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$

נחקור את הפונקציה הנתונה

$$f'(x) = -\sin(x) + x$$

זה בדיוק הפונקציה h מהסעיף הקודם.

ראינו בסעיף הקודם ש h עלתה תמיד, והתאפסה ב$x = 0$.

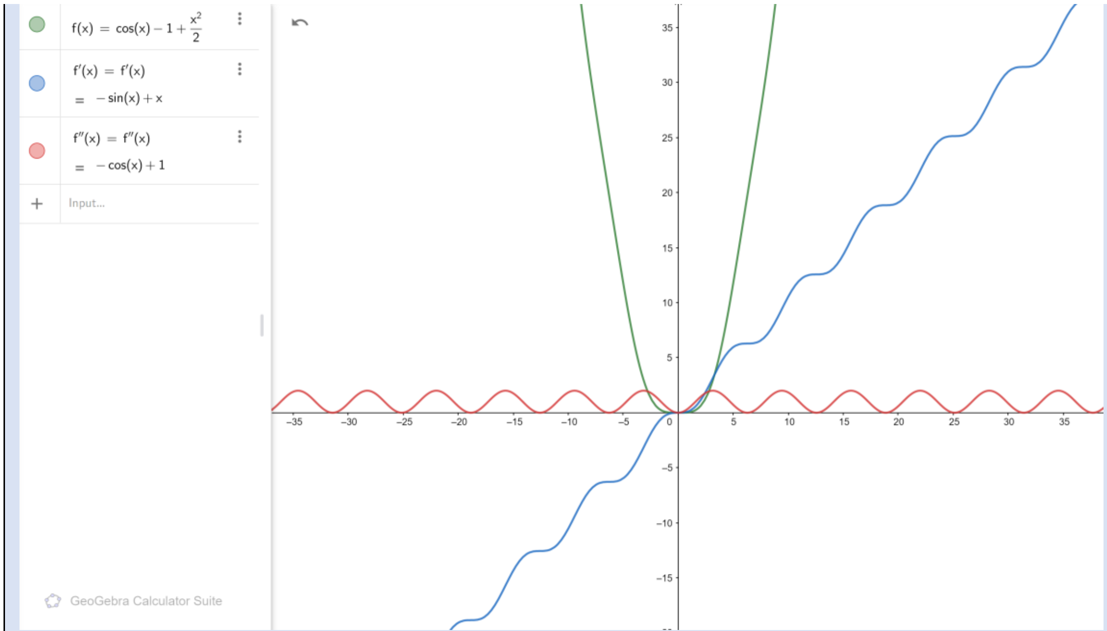
לכן $f' = h \leq 0$ בתחום $(-\infty, 0]$ וכן $f' = h \geq 0$ בתחום $[0, \infty)$

לכן f יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$

לכן המינימום הגלובאלי של f בכל הממשיים מתקבל בנקודה $x = 0$ וערך זה הוא

$$f(0) = 0$$

וזה הערך המינימלי של הפונקציה.



4. תהי פונקציה f הרציפה בקטע $(0,\infty)$, המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

א. הוכיחו או הפריכו: קיימת נקודה c עבורה $f(c) = 0$.

כיוון שהפונקציה רציפה, הכיוון יהיה משפט ערך הביניים.

כיוון שהגבול הוא מינוס אינסוף, קיימת נקודה עבורה

$$f(d)f\left(\frac{1}{d}\right) < -1$$

לכן $f(d) < 0, f\left(\frac{1}{d}\right) > 0$ או ההפך ולכן סיימנו לפי משפט ערך הביניים.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

הוכחה, נב"ש כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ לכן בפרט $\lim f(n) = 0$ לפי היינה, כיוון שהסדרה $a_n = n$ שואפת לאינסוף.

כמו כן, כיוון ש $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ נובע מהיינה כי $f\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$

נציב כעת את הסדרה $a_n = n$ בביטוי מהגבול הנתון

$$f(n)f\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \cdot 0 = 0$$

בסתירה לנתון שהגבול הוא $-\infty$.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$ וכן $a_1 = 6$.

א. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n > 1$.

למרות שלא תמיד פותרים תרגיל זה באינדוקציה, הפעם נשתמש באינדוקציה.

ראשית אכן $a_1 = 6 > 1$

יהי n עבורו $a_n > 1$ אזי

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1$$

הקטנו את הביטוי בתוך השורש, ולכן את הביטוי כולו.

ב. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

ראשית נציב $n = 1$ ונקבל כי

$$a_2 = \sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 4 < a_1$$

לכן ננחש כי הסדרה יורדת (זה בוודאי לא הוכחה, אבל נוכיח כעת).

שוב נוכיח באינדוקציה, למרות שהפעם ממש אפשר ללא אינדוקציה

את הבדיקה עשינו לפני רגע, כעת יהיה n עבורו $a_{n+1} < a_n$ צ"ל כי $a_{n+2} < a_{n+1}$

צ"ל כי

$$\sqrt{3a_{n+1} - 2} < \sqrt{3a_n - 2}$$

זה שקול ל

$$3a_{n+1} - 2 < 3a_n - 2$$

זה שקול ל

$$a_{n+1} < a_n$$

וזה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

דרך שנייה ללא אינדוקציה:

צ"ל כי

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\sqrt{3a_n - 2} < a_n$$

$$3a_n - 2 < a_n^2$$

$$a_n^2 - 3a_n + 2 > 0$$

אי השיוויון הזה מתקיים כאשר $a_n > 2$ או $a_n < 1$.

מסעיף א' השני לא אפשרי, נוכיח כי $a_n > 2$ באינדוקציה.

בדיקה: אכן $a_1 = 6 > 2$

יהי n עבורו $a_n > 2$ אזי

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$$

עוד לא סיימנו!!!

הוכחנו עד כה (בשתי דרכים) כי הסדרה מונוטונית יורדת.

היא חסומה בבירור, מסעיף א' אבל גם מהעובדה שהיא אי שלילית (האיבר הראשון חיובי, וכל איבר אחר הוא שורש) ולכן חסומה מלרע ע"י אפס.

כיוון שהיא מונוטונית וחסומה, הסדרה מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L \in \mathbb{R}$

כעת נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{3a_n - 2}$$

$$L = \sqrt{3L - 2}$$

$$L_{1,2} = 1,2$$

כיוון שהוכחנו כי לכל n מתקיים כי $a_n > 2$ גם הגבול $L \geq 2$ וסה"כ בהכרח $L = 2$ כי $L = 1$ נפסל והתשובה היא

$$\lim a_n = 2$$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = x$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולפי המשפט מההרצאה מתקיים כי

$$a_n \to \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ב. קרבו את $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נקבל באמצעות טיילור את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$$

סביב הנקודה המצוייה $x_0 = 0$

בנקודה הרצוייה $x = \frac{1}{2}$

ננחש סדר 4

$$f = \frac{1}{2} sin$$

$$f' = \frac{1}{2} cos$$

$$f'' = -\frac{1}{2} sin$$

$$f''' = -\frac{1}{2} cos$$

$$f^{(4)} = \frac{1}{2} sin$$

$$f^{(5)} = \frac{1}{2} cos$$

ולכן קיימת $0 < c < \frac{1}{2}$ עבורה

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(c)}{5!} \cdot \frac{1}{2^5}$$

$$|R_4| \leq \frac{1}{2^6 \cdot 5!} < \frac{1}{100}$$

עוד לא סיימנו כי צריך לתת את הקירוב

$$P_4(x) = 0 + \frac{1}{2}x + 0 - \frac{\frac{1}{2}}{3!}x^3 + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$