מספר הבהרות:

1. למונח מד"ר הומוגנית יש שתי משמעויות
   (א) מד"ר לינארית הומוגנית: $y' + P(x)\, y = 0$
   (ב) מד"ר הומוגנית: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ($f(x)$ פונקציה רציפה של משתנה אחד)
2. בשיעור שעבר סימנו את הפתרון ההומוגני y_h. מעכשיו נסמנו y_c

2.1 המשך משוואות לינאריות מסדר ראשון

1

נתונות המד"ר הבאות. מצא איזו מהן לינארית:

א. $y' + x\sqrt{y} = x^2$

ב. $y' + xy = e^x y$

ג. $\sin(y') + 2y = x$

פתרון

א' לא לינארית בגלל $\sqrt{y}$.

ב' לינארית <u>הומוגנית</u> - $y' + (x - e^x)\, y = 0$

ג' גם לא לינארית בגלל $\sin(y')$.

2

2 סוגים שונים של מד"ר מסדר ראשון:

(I) מד"ר הומוגנית: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

הפתרון: $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xz \Leftarrow$

$$y' = 1 \cdot z + xz' = z + xz' = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(z)$$

$$xz' = f(z) - z$$

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x} + C$$

דוגמה

פתור $\begin{cases} xyy' + 4x^2 + y^2 = 0 \\ y(2) = -7 \end{cases}$

פתרון

נחלק בx^2(אם $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow y^2 = 0$)

$$\frac{y}{x}y' + 4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{x}y' = -4 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\left(-4 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

נציב $y = xz$:

$$y' = z + xz' = f(z)$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dz}{z^{-1}(-4-z^2)-z} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dz}{2z^{-1}+z} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\frac{zdz}{2+z^2} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|2+z^2\right| = -2\ln|x| + C$$

$$\ln\left|2+z^2\right| = -4\ln|4| + K$$

$$z^2+2=e^{-4\ln|x|+K}=e^Ke^{-4\ln|x|}=e^K\left(e^{\ln|x|}\right)^{-4}=z^2+2=\overbrace{e^K}^{A}x^{-4}$$

$$z^2=Ax^{-4}-2$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=Ax^{-4}-2$$

$$\frac{y^2}{x^2}=Ax^{-4}=2$$

$$y^2=Ax^{-2}-2x^2\Rightarrow y=-\sqrt{Ax^{-2}-2x^2}$$

$$y=-\sqrt{Ax^{-2}-2x^2}$$

$$\boxed{A=228}$$

עוד סוג של מד"ר מסדר ראשון

(II) $y'=f\left(ax+by\right)$

נציב $z=ax+by\left(x\right)$

$$z'=a+b\underbrace{y'}_{\substack{\shortparallel\\ f(z)}}=a+bf\left(z\right)$$

דוגמה

$$y'=\left(x+y\right)^2$$

כאן $a=1=b$, ו־$f\left(x+y\right)=\left(x+y\right)^2$ כלומר $f\left(t\right)=t^2$. נציב $z=x+y$, נגזור לפי x:

$$z'=1+y'=1+\left(x+y\right)^2=1+z^2$$

$$\frac{dz}{1+z^2}=dx$$

$$\arctan\left(z\right)=x+C$$

$$z=\tan(x+C)$$

$$x+y=\tan(x+C)$$

$$y=\tan(x+C)-x$$

בדיקה

$$y'=\frac{1}{\cos^2(x+C)}-1=\frac{1}{\cos^2(x+C)}-\frac{\cos^2(x+C)}{\cos^2(x+C)}=\frac{\sin^2(x+C)}{\cos^2(x+C)}=\tan^2(x+C)$$

$$(x+y)^2=(x+\tan(x+C)-x)^2=\tan^2(x+C)$$

$$\surd$$

עוד סוג של מד"ר מסדר ראשון

(III) $$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

ישנם שני מקרים:

(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$. נניח בה"כ $(a_2,b_2)=\lambda(a_1,b_1)$

$$\begin{cases} a_2=\lambda a_1 \\ b_2=\lambda b_1 \end{cases}$$

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=\tilde{f}\left(\overbrace{a_1x+b_1y}^{z}\right)$$

דוגמה

$$y'=\frac{6x+2y+1}{3x+y+1}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$$2(3,1) = (6,2) \Rightarrow \lambda = 2$$

$$y' = \frac{2(3x+y)+1}{3x+y+1} = f(3x+y)$$

נציב $z = 3x + y$**. נגזור:**

$$z' = 3 + y' = 3 + \frac{2z+1}{z+1}$$

$$\left(\frac{z-1}{5z+4}dz = dx\right)$$

$$z' = \frac{3z+3}{z+1} + \frac{2z+1}{z+1} = \frac{5z+4}{z+1}$$

$$\frac{z+1}{5z+4}z' = 1$$

$$\frac{(z+1)\,dz}{5z+4} = dx$$

$$\frac{5z+4+1}{5z+4}dz = 5dx$$

$$\left(1 + \frac{1}{5z+4}dx\right) = 5dx$$

$$z + \frac{1}{5}\ln|5z+4| = 5x + C$$

$$\boxed{3x + y + \frac{1}{5}\ln|5x+5y+4| = 5x + C}$$

מקרה שני

(ii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. במקרה זה נציב ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$): $\left\{ \begin{array}{l} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x - \alpha \\ v = y - \beta \end{array} \right.$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$(y' =)\ \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right)$$

נרצה לאפס את הגורמים הקבועים במונה ובמכנה:

$$\begin{matrix} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2 \end{matrix} \ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

קיים פתרון (α, β). המד"ר היא

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + 0}{a_2u + v_2v + 0}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{v}{u}}\right) = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right)$$

נציב $z = \frac{v}{u} \Leftarrow uz = v$:

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du} = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right) = f\tilde{(z)}$$

ואפשר להפריד משתנים.

דוגמה

$$y' = \frac{x + y - 2}{x - y}$$

פתרון

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

נציב $\begin{cases} u = x - \alpha \\ v = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$

$$\begin{cases} 1\alpha + 1\beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = \beta = 1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + 1 + v + 1 - 2}{u + 1 - v - 1} = \frac{u + v}{u - v} = \frac{1 + \frac{v}{u}}{1 - \frac{v}{u}}$$

נציב $uz=v \Leftrightarrow z=\frac{v}{u}$

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\vdots$$

$$\arctan(z)-\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)=\ln|x-1|+C$$

$$\boxed{\arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2\right|=\ln|x-1|+C}$$

IV משוואת ברנולי

$$(k\neq 0,-1)\; y'=a(x)\,y+b(x)\,y^{k+1}$$

אם $k=-1$:

$$y'=a(x)\,y+b(x)$$

אם $k=0$:

$$y'=(a+b)\,y$$

מציבים $z=\frac{1}{y^k}$ ... $z'=-ka(x)\,z-kb(x)$

תרגיל ממבחן לדוגמה(לוזון)

פתור

$$y'+\frac{y}{x}=(xy)^2$$

פתרון

$$y' = -\frac{1}{x}y + x^2 y^{1+1}$$

כלומר $k=1$. נציב $z = \frac{1}{y'} = y^{-1}$:

$$z' = -\frac{1}{z^2}\left(-\frac{1}{x}y^1 + x^2 y^2\right)$$

$$z' = \frac{1}{x}\frac{1}{y} - x^2 = \frac{1}{x}z - x^2$$

המשוואה ההומוגנית: $z' = \frac{z}{x}$. הפתרון:

$$z_c = Kx$$

$$z_c' \stackrel{?}{=} \frac{z_c}{x}$$

$$K \stackrel{?}{=} \frac{Kx}{x} = K\surd$$

המשוואה הלא הומוגנית:

$$z_p = K(x)\,x.......z_p = -\frac{x^3}{2}$$

$$\Rightarrow z = z_c + z_p = Kx - \frac{x^3}{2 = \frac{1}{y}}$$

V משוואת ריקטי

$$y' = a(x)\,y^2 + b(b)\,y + c(x)\,(c, a \neq 0)$$

איך פותרים: אם ידוע פתרון $y_0(x)$ נציב $y = y_0(x) + z(x)$ ונקבל משוואת ברנולי.

דוגמה

פתור

$$\frac{dy}{dx}=-2-y+y^2$$

ננסה פתרון קבוע $\boxed{y=2}$: $y'=2'=0=-2-2+4=0$
נציב $y=2+z$:

$$z'=3z+z^{1+1}$$

זאת משוואת ברנולי. נציב

$$w=\frac{1}{z^k}=\frac{1}{z}$$

$$\vdots$$

$$y=2+\frac{3}{Ce^{-3x}-1}$$

VI משוואת קלרו

משוואת קלרו היא מד"ר מהצורה $y=xy'+f\left(y'\right)$
הפתרון: נגזור את המד"ר:

$$y'=1y'+xy''+f'\left(y'\right)y''$$

$$y''\left(x+f'\left(y'\right)\right)=0$$

שני מקרים:

א. $y''=0 \Leftarrow y'=\alpha$. נציב במשוואה המקורית $y=\alpha x+f\left(\alpha\right)$ ־ קווים ישרים.

ב. $x+f'\left(y'\right)=0$. זהו הפתרון הסינגולרי של משוואת קלרו, והוא המעטפת של הפתרונות הרגולרים.

דוגמה

מצא מד"ר עבור כל הישרים במישור שמרחקם מהראשית אחד.

פתרון

נתבונן בישרים מהצורה $y = mx + n$. מרחק הישר מ$(0,0)$ הוא

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|y-mx|}{\sqrt{(y')^2+1}}$$

$$d = \frac{|y-xy'|}{\sqrt{(y')^2+1}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$|y-xy'| = \sqrt{(y')^2+1}$$

$$y - xy' = \pm\sqrt{(y')^2+1}$$

$$y = xy' + \pm\underbrace{\sqrt{(y')^2+1}}_{f(y')}$$

$$f(t) = \sqrt{1+t^2}$$

הפתרון הרגולרי: $\alpha \in \mathbb{R}$

$$y = \alpha x + f(\alpha) = \alpha x \pm \sqrt{1+\alpha^2}$$

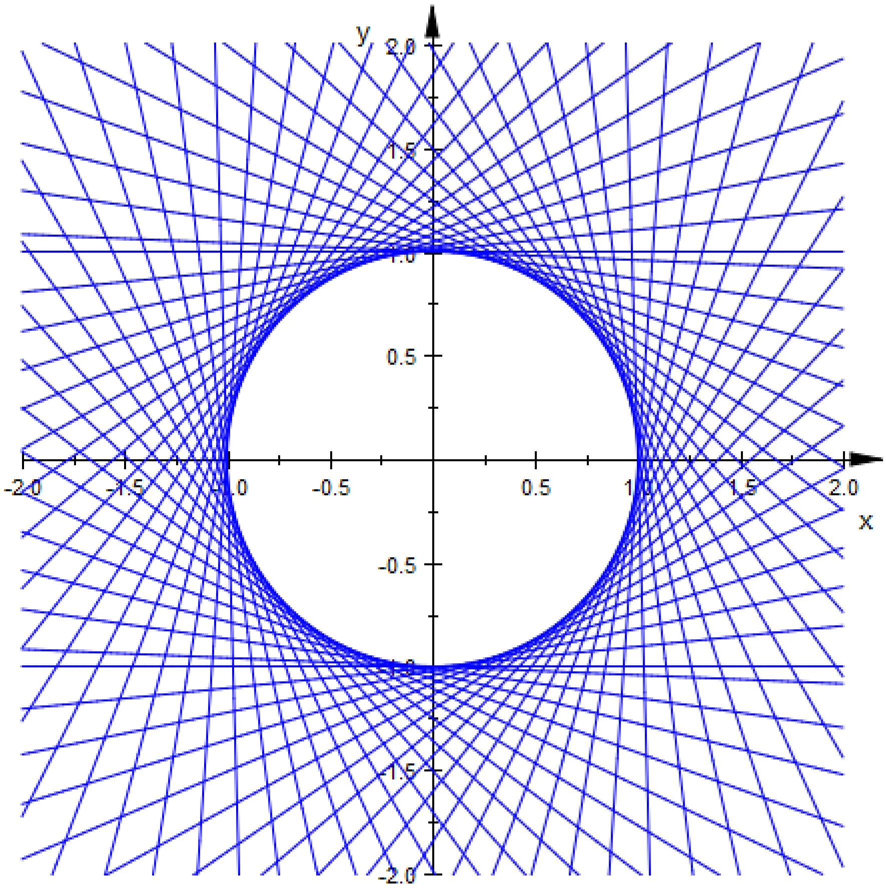
הפתרון הסינגולרי:

$$x + f'(y') = 0$$

$$x + \left.\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right|_{t=y'} = 0$$

$$x = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} ...... \boxed{x^2+y^2=1}$$

כלומר המעטפת היא מעגל שמורכב מנקודות המפגש של הפתרונות הסינגולרים:


y
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
x