5.1 המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$

למספר מרוכב כללי שנהוג לסמן ע"י האות z יש חלק ממשי $Re\left(z\right)$ וחלק וחלק מדומה $Im\left(z\right)$(שניהם ממשיים). $z=a+bi$. למשל $a=2+3i$, $\begin{matrix}Re\left(z\right)=2\\ Im\left(z\right)=3\end{matrix}$ (לא נכון להגיד $Im\left(z\right)=3i$!)

שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ מוגדר ע"י $\mathbb{C}=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$ והוא מהווה תו-ספת שימושית במיוחד.

הגדרה

בהנתן $z=a+bi\in\mathbb{C}$ הצמוד המרוכב שלו הוא $\overline{z}=a-bi$(עושים מינוס לחלק המדומה)

$$\overline{1-2i}=1+2i$$

$$\overline{5}=\overline{5+0i}=5-0i=5$$

למעשה $\overline{x}=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

הגדרה

הערך המחולט של $z=a+bi\in\mathbb{C}$ הוא $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

טענה

לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$:

א. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

ב. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

ג. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
אי שוויון המשולש: $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

הוכחה

נרשום $\begin{cases}z_1=a_1+b_1i\\ z_2=a_2+b_2i\end{cases}$

א.
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+b_ii)+(a_1+b_2i)}=\overline{a_1+a_2+\left(b_1+b_2\right)i}$$
$$=a_1+a_2-\left(b_1+b_2\right)i=(a_1-b_1i)+(a_2-b_2i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

עבור ב' וג' ההוכחה דומה

ניתן להכליל

לכל $z_1, z_2, ...z_n \in \mathbb{C}$

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \overline{z_1 + ... + z_k} = \overline{z_1} + ... + \overline{z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

(במילים: הצמוד של סכום הוא סכום הצמודים.

$$\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \overline{z_1 \cdot ... \cdot z_k} = \overline{z_1} \cdot ... \cdot \overline{z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

(במילים: הצמוד a של מכפלה הוא מכפלת הצמודים)

$$\left| \prod_{k=1}^{n} z_k \right| = |z_1 \cdot ... \cdot z_k| = |z_1| \cdot ... \cdot |z_k| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$$

(במילים: הערך המוחלט של מכפלה הוא מכפלת הערכים המוחלטים).

משפט(השורש הצמוד)

יהי $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ פולינום <u>ממשי</u>(כלומר $a_0, a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$). אזי אם $z_0 = \alpha + i\beta$ שורש של $P(x)$, כלומר $P(z_0) = 0$, גם $\overline{z_0} = \alpha - i\beta$ שורש של P.

הוכחה

z_0 שורש של P ולכן

$$P(z_0) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = 0$$

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \overline{0} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z_0^k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{1} \overline{a_k} \cdot \overline{z_0}^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{1} a_k \cdot \overline{z_0}^k = 0$$

$$P\left(\overline{z_0}\right) = 0$$

דוגמה

הפולינום $P(x) = x^2 + 1$ הוא פולינום ממשי. i שורש שלו וגם $\bar{i} = -i$ שורש שלו, אבל $\overline{2i} = -2i$ לא.

אנטי דוגמה

$P(x) = x - 2i$ אינו פולינום ממשי. $2i$ שורש שלו אבל $\overline{2i} = -2i$ לא.

מסקנה

בפולינומים ממשיים השורשים המרוכבים מגיעים בזוגות צמודים בלבד $\alpha \pm i\beta$

ייצוג קוטבי של מספרים מרוכבים

$$z = a + b_i = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\left(\cos\theta + \sin\theta\right) = r\mathrm{cis}\theta$$

משפט אוילר(ז"ל)

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \left(= \mathrm{cis}\theta\right)$$

הוכחה

נגדיר פונקציה $f(\theta) = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. נגזור:

$$f'(\theta) = -ie^{-ie\theta}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) + e^{-i\theta}\left(-\sin\theta + i\cos\theta\right) = e^{-i\theta}\left(-i\cos\theta + \sin\theta - \sin\theta + i\cos\theta\right)$$

קיבלנו $f'(\theta) \equiv 0 \Leftarrow f(\theta) \equiv C = f(0)$

$$f(0) = e^{-0}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 1 = f(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

אם נבחר $\theta = \pi$:

$$e^{i\pi} = -1$$

$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ - זהות אוילר.[1]

זהויות

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

$$\begin{cases} \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \\ \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2o} = \sin\theta \end{cases}$$

5.2 מד"ר ליניאריות עם מקדמים קבועים

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)} = \begin{cases} 0 & homogeous \\ b(x) & non-homogenous \end{cases}$$

(הפעם a_kקבועים ממשיים). נתחים מהמקרה ההומוגני:

דוגמה

$$y'' - y = 0 \quad y'' = y$$

מה עושים?

אוילר אמר לחפש פתרון מהצורה $y = e^{\lambda x}$ ואז $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ וכך הלאה...
נציב במשוואה ונקבל

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 1\right) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

[1]זוהי זהות מאוד יפה, שכן היא מכילה את הקבועים החשובים: $i, e, \pi, 1, 0$ ואת הפעולות העיקריות חיבור, כפל וחזקה

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm 1}$$

"ניחשנו" $y = e^{\lambda x}$ וקיבלנו $\lambda = 1$ או $\lambda = -1$ ולכן יש לנו שני פתרונות $\begin{cases} y_1 = e^{+1x} = e^x \\ y_2 = e^{-1x} = e^{-x} \end{cases}$.
הם בת"ל כמובן ולכן הפתרון הכללי הוא צירוף לינארי שלהם: $\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$

במקרה הכללי

$$a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

"ננחש" $y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, ...y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + ... + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

$$a_n \lambda^n + ... + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ נקרא הפולינום האופייני או הפולינום המאפיין, והמשוואה נקראת המשוואה האופיינית או המשוואה המאפיינת.

צריך למצוא את שורשי המשוואה ולהציבם בניחוש.

בעייה 1 (שורשים מרוכבים)

$$y'' + y^{(0)} = 0$$

המשוואה האופיינית: $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Leftarrow \begin{matrix} y_1 = e^{ix} \\ y_2 = e^{-ix} \end{matrix}$. אבל אנחנו לא רוצים להשתמש בi בפתרון...

פתרון ניקח צירופים לינאריים אחרים: $\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x) \\ Y_2 = \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x \end{cases}$

- בת"ל.

$$\boxed{y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

אם השורשים היו $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ היינו מקבלים

$$\begin{cases} y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}e^{\alpha x + i\beta x} + \frac{1}{2}e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x}\frac{e^{i(\beta x)} + e^{-i(\beta x)}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ Y_2 = \frac{1}{xi}y_1 - \frac{1}{2_i}y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

בעיה 2(שורש מרובה)

$$y'' - 2y' + y = 0$$

מ. אופיינית:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1, 1$$

יש רק שורש אחד $\lambda = 1$ אך הוא מופיע בחזקה שנייה(שורש כפול). ברור ש- $y_1 = e^{1\cdot x} = e^x$. נשתמש בהורדת סדר:

$$\begin{cases} y = e^x z \\ y' = e^x z + e^x z' \\ y'' = e^x z + 2e^x z' + e^x z'' \end{cases}$$

$$e^x z'' + 2e^x z' + e^x z - -2e^x z - 2e^x z' + e^x z = 0$$

$$e^x z'' = 0$$

$$z'' = 0$$

$$z' = C_1$$

$$Z = C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^x (C_1 x + C_2) = C_1 x e^x + C_2 x}$$

אם השורש λ היה מופיע בחזקת m הסדרה $x^0 e^{\lambda x}, x^1 e^{\lambda x}, ...x^{m-1}e^{\lambda x}$ נותנת m פתרונות בת"ל. כלומר $\boxed{\left\{x^k e^{\lambda x}\right\}_{k=0}^{m-1}}$. אם מדובר בזוג שורשים מרוכבים(צמודים!) $\alpha \pm i\beta$ הסדרה:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, ...x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

נותנת $2m$ פתרונות בת"ל $\left\{x^k e^{\alpha x}\cos\beta x\right\}_{k=0}^{m-1} \cup \left\{x^k e^{\alpha x}\sin\beta x\right\}_{k=0}^{m-1}$.

תנאי התחלה

כמובן שניתן לצרף למשוואה תנאי התחלה, למשל $\left\{\begin{array}{c} y''+y=0 \\ y\left(1\right)=1 \\ y'\left(1\right)=0 \end{array}\right.$

פתרון

הפתרון הכללי הוא $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. נציב את תנאי ההתחלה: $1=y\left(1\right)=C_1\cos\left(1\right)+C_2\sin\left(1\right)$

$$0=y'\left(1\right)=y'\left(x\right)|_{x=1}=-C_1\sin\left(x\right)+C_2\cos x|_{x=1}=-C_1\sin\left(1\right)+C_2\cos\left(1\right)$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}\cos\left(1\right) & \sin\left(1\right)\\ -\sin\left(1\right) & \cos\left(1\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c} C_1=\cos\left(1\right) \\ C_2=\sin\left(1\right) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\cos\left(1\right)\cos\left(x\right)+\sin\left(1\right)\sin\left(x\right)\approx 0.54\cos\left(x\right)+0.84\sin\left(x\right)}$$

חשוב להדגיש

בפתרון הכללי מופיעים כל הקבועים החופשיים ובפתרון פרטי אין קבועים חופשיים בכלל.

המקרה האי הומוגני

אופרטורים דיפרנציאלים לינאריים

אם נסמן $L=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kD^k$ נוכל לרשום את המד"ר הלינארית הכללית בצורה $Ly=b$
דרך אחת לפתור $Ly=b$ היא:

שיטת המשמיד Annihilator method

צריכים למצוא אד"ל(אופרטור דיפרנציאלי לינארי) A (מהמילה Annihilator) "המשמיד" שמשמיד את b כלומר $Ab=0$. כופלים את המשוואה בA משמאל:

$$ALy=Ab=0$$

וזו משוואה הומוגנית.

זהירות "הקבועים החופשיים" שבאו מA לא חופשיים. צריך למצוא אותם.

דוגמה

$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

פתרון

$$\underbrace{\left(D^2 + 3D + 2\right)}_{L} y = x^2$$

המשמיד של x^2 הוא $A = D^3$

$$\Rightarrow D^3 \left(D^2 + 3D + 2\right) y = 0$$

$$(D - 0)^3 (D + 1)(D + 2) y = 0$$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + C_5 e^{-2x}$$

C_1, C_2, C_3 הגיעו מהפתרון האי הומוגני(ההכפלה בD^3 - $y_p = C_1 + C_2 x + C_2 x^2$) ולכן הם לא קבועים חופשיים - צריך לחשב אותם:

$$y_p' = C_2 + 2C_3 x$$

$$y_p'' = 2C_3$$

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = x^2$$

$$2C_3 + 3C_2 + 6C_3 x + 2C_1 + 2C_2 x + 2C_3 x^2 = x^2$$

$$(2C_3) x^2 + (6C_3 + 2C_2) x^1 + (2C_3 + 3C_2 + 2C_1) = 1x^2 + 0x + 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{2} \\ C_2 &= -\frac{3}{2} \\ C_1 &= \frac{7}{4} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} x^2 + C_4 e^{-x} + C_5 e^{-2x}}$$