פתרון תרגיל בית 13 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהי G חבורה סופית, יהי p ראשוני, ותהי P תת־חבורת p-סילו של G. תהי $H \leq G$ תת־חבורת-p כלשהי של G.

א. הוכיחו שאם HP תת־חבורה של G, אז $H \leq P$. רמז: העזרו במסקנה האחרונה בשאלה השלישית בבוחן השני כדי להראות כי HP היא חבורת-p.

ב. נניח כי $H \leq N_G(P)$. הוכיחו כי $H \leq P$. רמז: הסעיף הקודם.

ג. הוכיחו כי H מוכלת בתת־חבורה p-סילו כלשהי של G. רמז: התבוננו בפעולה של H על $\mathrm{Syl}_p(G)$ לפי הצמדה והסבירו למה יש לפעולה נקודת שבת. כעת העזרו בסעיף הקודם.

פתרון.

א. במסקנה מהבוחן ראינו כי
$$|HP| = \frac{|H|\,|P|}{|H \cap P|}$$
מפני שכל הגדלים באגף ימין הם חזקות של P (רק צריך לוודא כי $H \cap P \leq H$ ולכן הסדר שלה מחלק את הסדר של H), אז $|HP|$ הוא חזקת p. קיבלנו כי HP היא תת־חבורת-p של G המכילה את P ואת H. אבל P תת־חבורת-p מקסימלית של G, ולכן $P = HP$. מסיימים את ההוכחה עם $H \subseteq HP = P$.

ב. נוכיח כי HP חבורה. נוכיח שהיא תת־חבורה של G לפי הקריטריון המקוצר. ברור כי $e = e \cdot e \in HP$, ולכן היא לא ריקה. יהיו $h_1p_1, h_2p_2 \in HP$ כאשר $h_i \in H$ ו-$p_i \in P$. אז
$$h_1p_1(h_2p_2)^{-1} = h_1p_1p_2^{-1}h_2^{-1} = h_1p_3h_2^{-1}$$
עבור $p_3 = p_1p_2^{-1}$. מהנתון על המנרמל, לכל $p \in P$ מתקיים כי $h_2ph_2^{-1} \in P$. לכן
$$h_1p_3h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}h_2p_3h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}p_4 \in HP$$
עבור $p_4 = h_2ph_2^{-1}$ ו-$h_1h_2^{-1} \in H$. לכן $HP \leq G$ תת־חבורה, ונסיים לפי הסעיף הקודם.
אגב, בפרט (שוב) הוכחנו כי P היא תת־חבורת p-סילו היחידה של $N_G(P)$.

ג. נעזר ברמז, ונזכר שאם חבורת-p פועלת על קבוצה מגודל שזר ל-p, אז יש לפעולה נקודת שבת. לפי משפט סילו השלישי ידוע לנו כי
$$\left|\mathrm{Syl}_p(G)\right| = n_p \equiv 1 \pmod p$$
ולכן $\mathrm{Syl}_p(G)$ היא קבוצה מסדר זר ל-p. בכיתה פגשנו את פעולת ההצמדה של G על $\mathrm{Syl}_p(G)$ וניתן לצמצם אותה ל-H. לפעולה המצומצמת הזו יש נקודת שבת, נניח $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. כלומר לכל $h \in H$ מתקיים כי $hPh^{-1} = P$, או במילים אחרות $H \subseteq N_G(P)$. לפי הסעיף הקודם נסיק $H \leq P$.

שאלה 2. רמז: $120 = 5!$.

א. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 120 היא פתירה.

ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 היא לא פשוטה. רמז: בדקו מתי $n_5 = m \neq 1$, הסתכלו על העתקה $G \to S_m$ והאם היא לתוך A_m.

פתרון.

א. הפרכה. נבחר את S_5 שאינה פתירה. בבוחן השני הראיתם כי $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ אינה איזומורפית ל-S_5, וגם היא חבורה לא פתירה מסדר 120.

ב. תהי G חבורה מסדר 120. הדוגמה בסעיף הקודם מראה שיתכן שכל תת־חבורות סילו שלה אינן נורמליות.
נניח בשלילה כי G פשוטה. אם $n_5 = 1$, אז G אינה פשוטה. אז $n_5 = 6$, כי שאר המחלקים של 120 לא משאירים שארית 1 בחלוקה ב-5, ולכן יש שיכון $\varphi\colon G \to S_6$.
נשים לב כי $\varphi(G) \cap A_6 \lhd \varphi(G)$ ואז פוסלים את האפשרות שיש רק איברים מסדר 2 (כי $3|120$), ואז $\varphi(G) \leq A_6$. אבל אז $[A_6 : \varphi(G)] = 3 < 6$ וזו סתירה לתרגיל שראינו.

שאלה 3. רמז: $5782 = 2 \cdot 7^2 \cdot 59$.

א. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 5782 היא פתירה.

ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר 5782 היא לא פשוטה.

פתרון.

א. הוכחה. תהי G חבורה מסדר 5782. לפי משפט סילו השלישי ניתן לחשב כי $n_{59} = 1$.
אם $Q \leq G$ היא תת־חבורת 59-סילו, אז היא נורמלית ומספיק להראות כי Q ו-G/Q הן פתירות. מפני ש-$|Q| = 59$ ראשוני, אז Q ציקלית ולכן בוודאי פתירה. עבור G/Q נשים לב שהיא מסדר $2 \cdot 7^2$ ולכן אם $P/Q \leq G/Q$ היא תת־חבורת 7-סילו, אז היא מאינדקס 2, ולכן נורמלית. כעת נשארו רק עם חבורות-p שהן תמיד פתירות, כמנות בסדרה תת־נורמלית של G.

ב. תהי G חבורה מסדר 5782. בסעיף הקודם ראינו כי $n_{59} = 1$ ולכן יש לה תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

שאלה 4. תהי $G = D_5 \times U_7$.

א. מצאו את איברי תת־חבורת הקומוטטורים G'.

ב. האבליניזציה $\overline{G} = G/G'$ היא חבורה אבלית סופית. מצאו את הצורה הקנונית שלה, כלומר מצאו מספרים d_i כך ש-$\overline{G} \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ כאשר $d_i | d_{i+1}$.

פתרון.

א. תהינה A, B חבורות. נשים לב כי עבור $a_1, a_2 \in A$ ו-$b_1, b_2 \in B$ מתקיים ש-

$$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = ([a_1, a_2], [b_1, b_2])$$

ולכן $(A \times B)' = A' \times B'$. אצלנו $B = U_7$ היא אבלית, ולכן $U_7' = \{1\}$.
עבור $A = D_5$, ברור כי $D_5' \neq \{\mathrm{id}\}$ מפני ש-D_5 לא אבלית. ניקח שני איברים $\tau\sigma^i, \tau\sigma^j \in D_5$ ונחשב

$$\begin{aligned}\left[\tau\sigma^i, \tau\sigma^j\right] &= \tau\sigma^i\tau\sigma^j \left(\tau\sigma^i\right)^{-1} \left(\tau\sigma^j\right)^{-1} \\ &= \tau\sigma^i\tau\sigma^j\sigma^{-i}\tau\sigma^{-j}\tau = \tau\tau\sigma^{-i}\sigma^j\sigma^{-i}\sigma^j\tau\tau = \sigma^{2j-2i}\end{aligned}$$

אם נבחר $j = 1, i = 0$, אזי קיבלנו כי $\sigma^2 \in D_5'$. לכן $\langle \sigma^2 \rangle = \langle \sigma \rangle \leq D_5'$. אפשר להראות ישירות כי אין אף שיקוף (איבר מן הצורה $\tau\sigma^i$) ב-D_5'. דרך אחרת היא לשים לב כי $\langle \sigma \rangle \lhd D_5$, ושחבורת המנה $D_5/\langle \sigma \rangle$ היא מסדר 2, ולכן אבלית. נסיק כי $D_5' \leq \langle \sigma \rangle$ ומפני ש-D_5 לא אבלית, אז $D_5' \neq \{\mathrm{id}\}$. בסך הכל קיבלנו כי $D_5' = \langle \sigma \rangle$.
לכן

$$G' = D_5' \times U_7' = \langle \sigma \rangle \times \{1\} \cong \mathbb{Z}_5$$

ב. הסדר של $\overline{G}$ הוא
$$\left|\overline{G}\right| = \left|{}^{G}\!/\!{}_{G'}\right| = \frac{|G|}{|G'|} = \frac{10\cdot 6}{5} = 12$$
יש בסך הכל שתי חבורות אבליות מסדר 12 עד כדי איזומורפיזם, והן $\mathbb{Z}_{12}$ ו-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$. האם אתם יכולים להראות כי $\overline{G}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$? העזרו בכך ש-$U_7$ היא חבורה אבלית מסדר 6 ולכן $U_7\cong\mathbb{Z}_6$ וש-$\overline{D_5}\cong\mathbb{Z}_2$.

שאלה 5. חבורה G תקרא מטא-אבלית אם יש לה תת־חבורה נורמלית $N\lhd G$ כך שגם N אבלית וגם ${}^{G}\!/\!{}_{N}$ אבלית. רמז כללי: נסו להשתמש במשפטי האיזומורפיזמים.

א. הוכיחו שחבורה G היא מטא-אבלית אם ורק אם G' היא אבלית (הבינו למה זה שקול לכך שכל שני קומוטטורים של איברי G מתחלפים).

ב. הוכיחו שכל תת־חבורה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

ג. הוכיחו שכל חבורת מנה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

פתרון.

א. נניח $N\lhd G$ אבלית וגם G/N אבלית. אז $G'\le N$, ולכן G' אבלית.
בכיוון השני, נניח כי G' אבלית, ונבחר $N=G'$ כי G/G' תמיד אבלית וכן $G'\lhd G$.

ב. אפשר להוכיח את הטענה ישירות, או להזכר כי $H'\le G'$, ואז לפי הסעיף הקודם H' אבלית כי היא תת־חבורה של חבורה אבלית.

ג. נניח $K\lhd G$, ונתבונן בהטלה הטבעית $\pi\colon G\to G/K$. דרך אחת היא להראות כי $\pi(N)$ אבלית ונורמלית בחבורת המנה G/K. דרך אחרת לחשב כי $(G/K)'$ אבלית: יהיו $[gK,hK],[g'K,h'K]\in(G/K)'$. אז
$$[gK,hK]=[g,h]K\in G'K$$
$$[[gK,hK],[g'K,h'K]]=[[g,h]K,[g',h']K]=[[g,h],[g',h']]K=K=e_{G/K}$$
ולכן אם היוצרים של $(G/K)'$ כולם מתחלפים זה עם זה, אז היא אבלית.

שאלה 6. תהי $\mathcal{V}$ המחלקה של כל החבורות הפתירות.
רשות: אפשר לפתור את השאלה גם עבור המחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות.

א. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתת־חבורות. כלומר אם $G\in\mathcal{V}$, אז לכל $H\le G$ גם $H\in\mathcal{V}$.

ב. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתמונות הומומורפיות. כלומר אם $G\in\mathcal{V}$, אז לכל $K\lhd G$ גם ${}^{G}\!/\!{}_{K}\in\mathcal{V}$.

ג. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה למכפלה ישרה סופית. כלומר אם $G,H\in\mathcal{V}$, אז גם $G\times H\in\mathcal{V}$.

פתרון.

א. תהי
$$\{e\}=G_n\lhd\cdots\lhd G_1=G$$
סדרה תת־נורמלית של G עם מנות אבליות. נסתכל על הסדרה
$$\{e\}=H_n\lhd H_{n-1}\lhd\cdots\lhd H_1=H$$
כאשר לכל i נבחר $H_i=G_i\cap H$. נשים לב כי
$$H_{i+1}=G_{i+1}\cap H=G_{i+1}\cap G_i\cap H=G_{i+1}\cap H_i$$
כעת נראה שזה אכן מגדיר תת־סדרה נורמלית עבור H, כי לכל i לפי משפט האיזומורפיזמים השני עבור $G_{i+1}\lhd G_i$ ו-$H_i\le G_i$ מתקיים
$$H_i/H_{i+1}=H_i/(G_{i+1}\cap H)\cong(H_iG_{i+1})/G_{i+1}$$
ומפני ש-$H_iG_{i+1}\le G_i$ נקבל שישנו שיכון $G_i/G_{i+1}\hookrightarrow H_i/H_{i+1}$. כאמור G_i/G_{i+1} היא אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה אבלית, ונסיק שהמנה H_i/H_{i+1} אבלית.

ב. תהי

$$\{e\} = G_n \lhd \cdots \lhd G_1 = G$$

סדרה תת־נורמלית של G עם מנות אבליות. נסתכל על הסדרה

$$\{e_{G/K}\} = \{K\} = (G_nK)/K \lhd (G_{n-1}K)/K \lhd \cdots \lhd (G_1K)/K = G/K$$

כאשר אנחנו יודעים כי $G_iK \rhd K$ לכל i, שהרי הנחנו $G \rhd K$ ושימוש במשפט האיזומורפיזמים השני. לכל i מתקיים כי $(G_iK)/K \rhd (G_{i+1}K)/K$, למשל לפי משפט ההתאמה לגבי $G_iK \rhd G_{i+1}K$ (שצריך להוכיח), ולכן זאת סדרה תת־נורמלית. לפי משפט האיזומורפיזמים השלישי נקבל

$$((G_iK)/K)/(((G_{i+1}K)/K) \cong G_iK/G_{i+1}K$$

כעת נבדוק האם $G_iK/G_{i+1}K$ אבלית. יהיו $g_1, g_2 \in G_i$ ו-$k_1, k_2 \in K$. אז

$$[g_1k_1G_{i+1}K, g_2k_2G_{i+1}K] = [g_1k_1, g_2k_2]G_{i+1}K$$

לפי ההגדרה של הפעולה בחבורות מנה. נתון כי $G \rhd K$, ולכן $[g_1k_1, g_2k_2] \in [g_1, g_2]K$ וגם $G_{i+1}K = KG_{i+1}$. לכן

$$\begin{aligned}[g_1k_1, g_2k_2]G_{i+1}K &= [g_1k_1, g_2k_2]KG_{i+1} = ([g_1k_1, g_2k_2]K)G_{i+1} \\ &= ([g_1, g_2]K)G_{i+1} = [g_1, g_2]G_{i+1}K = G_{i+1}K\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך שהמנה G_i/G_{i+1} אבלית, ולכן $[g_1, g_2]G_{i+1} = G_{i+1}$. כלומר $G_iK/G_{i+1}K$ חבורה אבלית לכל i, כדרוש.

ג. נסתכל על תת־החבורה $G \times \{0\}$. מתקיים ש$G \times \{0\} \trianglelefteq G \times H$. לכן מספיק להוכיח ש$G \times \{0\}$ פתירה, ו$(G \times H)/(G \times \{0\})$ פתירה. אבל $G \times \{0\} \cong G$ ו$(G \times H)/(G \times \{0\} \cong H$, ונתון ששתיהן פתירות.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 7. תהי G חבורה פתירה. נגדיר את דרגת הפתירות של G להיות המספר $t \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G^{(t)} = \{e\}$.
באופן דומה מגדירים לחבורה נילפוטנטית את דרגת הנילפוטנטיות שלה להיות המספר $c \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G_c = \{e\}$ (האיבר ה-c בסדרה המרכזית היורדת).
לדוגמה, חבורה מדרגת פתירות 1 או דרגת נילפוטנטיות 1 היא אבלית, כי $G^{(1)} = \{e\} = G_1$.

א. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הפתירות של D_n היא 2.

ב. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הנילפוטנטיות של D_{2^n} היא $n-1$.

ג. הראו שהמחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות לא סגורה למכפלה ישרה אינסופית.

שאלה 8. נראה שישנן חבורות שבהן תת־חבורת הקומוטטורים מכילה איברים שאינם קומוטטורים.

א. נסמן $G = GL_2(\mathbb{R})$. הוכיחו $G' \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ (למעשה יש שיוויון) וכי $-I_2 \in G'$.

ב. יותר קשה: הוכיחו כי $-I_2 \in G'$ הוא קומוטטור של איברי G, אבל לא של איברי G'. נסו להציג אותו כמכפלה של קומוטטורים של G'.

ג. תהי H חבורה שבה $|H'| < [H : Z(H)]^2$. הוכיחו כי H' מכילה איברים שאינם קומוטטורים. רמז: קודם הראו ש-$[ay, bz] = [a, b]$ לכל $a, b \in H$ ו-$y, z \in Z(H)$.
הערה: לכל p ראשוני קיימות חבורות-p מטא-אבליות שמקיימות את התנאי הזה.

בהצלחה!