בשיעור הקודם

הראינו כמה בעיות:

- SAT - מציאת ψ ספיקה בצורת CNF
- VC - עבור גרף G ומספר k, מציאת כיסוי קודקודים לG בגודל$\leq k$
- DS - עבור גרף G ומספר k, מציאת קבוצה שלטת בגודל$\leq k$
- HAM - מציאת מעגל המילטוני בגרף G

הראנו

אם $DS \in P$ אזי גם $VC \in P$ - $VC \leq^P DS$

באופן כללי

A, B שפות, $A \leq^P B$ אם יש רדוקציה מA לB שניתנת לחישוב בזמן פולינומי(הרדוקציה תמיד דט.)

באופן כללי אם $A \leq^P B$ ו$B \in P \Leftarrow A \in P$

רוצים למצוא שפה L כך ש:

נניח שלכל $L' \in NP$, $L' \leq^P L$. כלומר יש רדוקציה פולינומית מL' לL.

נניח $L \in P$$\Leftarrow$$P = NP$.

הגדרה

תהי L שפה. נאמר כי L הינה <u>NP-שלמה</u>(NPC - $NP-Complete$) אם:

1. $L \in NP$
2. לכל $N' \in NP$, $L' \leq^P L$

השפה שמקיימת את תנאי 2 נקראת NP-קשה.

נשים לב

אם L NP-קשה ו$L \in P$ $\Leftarrow$ $P = NP$

מצד שני

אם L NP-שלמה ו$L \notin P$ אזי $P \neq NP$

וכמו כן

אם $P \neq NP$ וL NP-קשה אזי $L \notin P$

אבל

בכלל לא מובטח לנו שיש שפה כזו!

נגדיר

$NDA \subseteq \{(N,w,k)\}$ כך שN מ"ט ל"ד, w מחזורת, k הוא מספר בכתיב אונרי, ויש לN חישוב על w שמגיע למצב acc בתוך k צעדים.

טענה

NDA הינה NP-שלמה.

הוכחה

$NP \ni NDA$

ננחש חישוב באורך לכל היותר k ונבדוק שאכן מגיע למצב acc.

NDA הינה NP קשה

תהי $L' \in NP$. נראה רדוקציה פולינומית מL' לNDA.

נשים לב: מכיוון שk אונרי, אורך הקלט שלנו לפחות k, ולכן חישוב שיהיה פולינומי בk יהיה פולינומי באורך הקלט. אם לא היינו מגדירים שk בכתיב אונרי, לא היינו מקבלים את זה.

$L' \in NP \Leftarrow$ קיימת מ"ט ל"ד $N_{L'}$ שמכריעה את L' בזמן ל"ד פולינומי. כלומר, קיימים קבועים c,d כך שלכל $x \in \Sigma^*$:

1. אם $x \in L'$ אזי קיים חישוב של $N_{L'}$ שמגיע למצב acc בתוך $|x|^c+d$ צעדים.
2. אם $x \notin L'$ אזי כל חישוב של $N_{L'}$ על x לא מגיע למצב acc

כלומר,

$$R(x) = \left(N_{L'}, x, 1^{|x|^2+d}\right)$$

הרדוקציה פולינומית(ב $|x|$) כי:

- כתיבת $N_{L'}$ - קבוע
- כתיבת x - לינארי ב$|x|$
- חישוב $|x|^c+d$ - פולינומי ב$|x|$
- כתיבת $1^{|x|^c+d}$ - פולינומי ב$|x|$

מסקנה

אם A NP-קשה ו$A \leq^P B$ אזי B גם כן NP-קשה.

דוגמה

$\{(T, t_0, t_1)\} \subseteq 2BTile$ כך שיש ריבוע $k \times k$ שבו יש ריצוף כשר של T שבו מופיעים גם t_0 וגם t_1
$\{(T, t_0, t_1, 1^k)\} \subseteq 2BTile$ כל שיש ריצוף קשר בריבוע $k \times k$ שבו מופיעים גם t_0 וגם t_1.

טענה

$B2BTile$ הינה NPC

רעיון ההוכחה

$B2BTile \in ND$

ננחש פתרון ונבדוק. זמן: $O\left(k^2 + |T|\right)$ פולינומי בגודל הקלט.

$B2BTile$ NP-קשה

נראה $B@BTile \leq^P NDA$, כלומר בהנתן $\left(N, w, 1^k\right)$ נבנה $\left(T, t_0, t, i^j\right)$ כך שיש חישוב של N על w שמגיע למצב acc בדיוק k צעדים אם"ם יש ריצוף של T.

משפט Levin-Cook

SAT הינה NP שלמה.

הוכחה

$SAT \in N$: הראנו. נראה $B2BTile \leq^P SAT$. כלומר בהנתן $\left(T, t_0, t_1, 1^k\right)$ נבנה ψ בצורת CNF כך ש$\left(T, t_0, t_1, 1^k\right) \in B2BTile$ אם"ם ψ ספיקה.
הגודל של ψ פולינומי ב$\left(T, t_0, t_1, 1^k\right)$ ובניית ψ ג"כ פולינומי.

נבנה את האריחים בT, $t_0, t_1, ...t_{d-1}$ ונסמן:

- $H \subseteq \{(l, l')\}$ כך ש$t_{l'}$ מותר שיפועי מימין לt_l.
- $V \subseteq \{(l, l')\}$ כך ש$t_{l'}$ מותר שיופיע מעל לt_l.

המשתנים בψ, $x_{i,j,l}$, $\begin{matrix} 1 \leq i, j \leq k \\ 0 \leq l \leq d-1 \end{matrix}$

המשמעות

$T = x_{i,j,l}$ אם"ם במשבצת i, j מופיע האריח t_l.

בניית ψ

1. <u>בכל משבצת ישנו אריח:</u>
לכל $1 \le i, j \le k$

$$\left(x_{i,j,0} \vee x_{i,j,1} \vee \ldots \vee x_{i,j,d-1}\right)$$

עלות בדיקה - dk^2

2. <u>בכל משבצת לכל היותר אריח אחד:</u>
לכל $1 \le i, j \le k$, **לכל** $0 \le l, l' \le d-1$ **יש** $l \ne l'$

$$\neg\left(x_{i,j,l} \wedge x_{i,j,l'}\right) = \left(\neg x_{i,j,l} \vee \neg x_{i,j,l'}\right)$$

עלות בדיקה - $2d^2k^2$

3. <u>הכללים האופקיים נשמרים:</u>
לכל $1 \le i \le k-1$, $1 \le j \le k$, **לכל** $(l, l') \notin H$:

$$\neg\left(x_{i,j,l} \wedge x_{i+1,j,l'}\right) = \left(\neg x_{i,j,l} \vee \neg x_{i+1,j,l}\ \right)$$

עלות בדיקה - $2d^2k^2$

4. <u>הכללים האנכיים נשמרים:</u>
לכל $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k-1$, **לכל** $(l, l') \notin V$:

$$\left(\neg x_{i,j,l} \vee \neg x_{i,j+1,l}\ \right)$$

עלות בדיקה - $2d^2k^2$

5. <u>t_0 וt_1 מופיעים:</u>

$$\left(\bigvee_{1 \le i,j \le k} x_{i,j,0}\right)$$

עלות בדיקה - k^2

$$\left(\bigvee_{1 \le i,j \le k} x_{i,j,1}\right)$$

עלות בדיקה - k^2

סה"כ, עלות הבדיקה ב$O\left(d^2k^2\right) \Leftarrow$ הרדוקציה פולינומית ■