הרצאה 2:

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{r}}_i')^2=\frac{1}{2}MV^2+\sum\frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

$$\boxed{V^2=|\dot{\vec{R}}|^2 \quad v_i'^2=|\dot{\vec{r}}_i'|^2}$$

$$\frac{1}{2}\sum m_i\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}}_i'=\frac{1}{2}\dot{\vec{R}}\cdot\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i'=\frac{1}{2}\dot{\vec{R}}\cdot\Big(\underbrace{\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i'}_{=0}\Big)$$

$$\vec{F}_i^{(e)}=-\nabla_i V_i$$

$$\nabla_i V=\left(\frac{\partial V}{\partial x_i},\frac{\partial V}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial z_i}V\right)$$

$$\vec{F}_{ij}=-\nabla_i V_{ij}$$

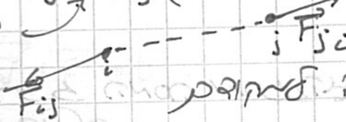
עבור כוחות משמרים:

$$\vec{F}_{ji}=-\nabla_j V_{ij}$$

$$\vec{F}_{ij}=-\nabla_i V_{ij}$$

$$V_{ij}=V_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

חוק שלישי של ניוטון.



כעת החישוב המתמטי מאוד דומה למקודם

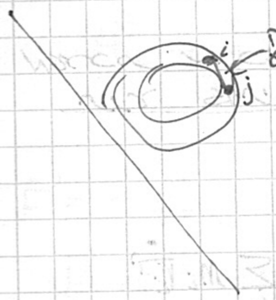
ונגיע ל:

$$T_1+V_1=T_2+V_2$$

$$T=\frac{1}{2}M(\dot{R})^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i(\dot{\vec{r}}_i)^2$$

$$V=\sum_i V_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}$$

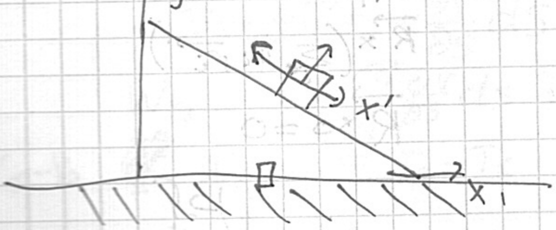
לדוגמא: גוף צפיד:



$$\frac{1}{2}\sum_{ij}V_{ij}=\text{const}$$

מגוף צפיד

ולכן זה חלק קבוע ולכן מותר להזניח כמו בכל פוטנציאל אחר!



אילוצים:

דרך אחת: לבחור x ו-y חדשים.

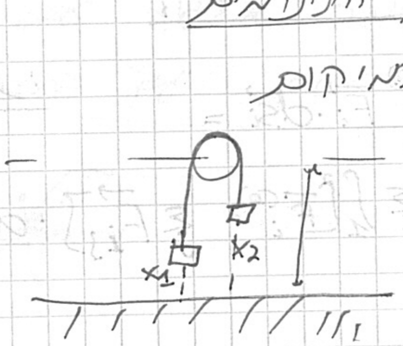
דרך שניה: בוחרים x' ו-y' שמתאימים לאילוצים.

טיפול באילוצים:

אילוצים לא הולונומים

אילוצים הולונומים

רק המיקום



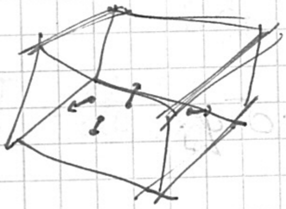
$$R-x_2+R-x_1=\text{const}$$

אילוץ הולונומי

בצורה מתמטית:

$$f(\vec{r_1},\vec{r_2},\dots \vec{r_N},t)=0$$

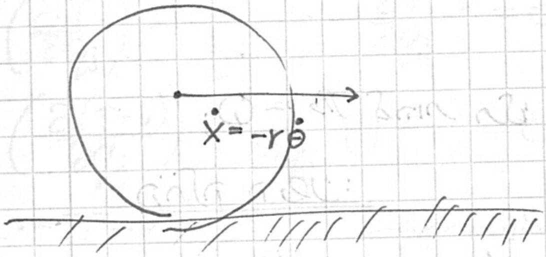
<u>אילוץ הולונומי</u>



<u>אילוץ לא הולונומי</u>

כי זה אי-שוויון ולא שוויון.

<u>אילוץ לא הולונומי:</u>



מערכת של N מסות ללא אילוצים:

$$\forall i \quad \vec{F_i}=\dot{\vec{p_i}}$$

עקרון D'Alembert

<u>משוואות Euler - Lagrange</u>

$$\underset{\text{כוח כללי}}{f_i^T}=\vec{F_i}+\underset{\text{כוח אילוץ}}{\vec{f_i}}$$

$$\vec{F_i}\delta\vec{r_i}=\dot{\vec{p_i}}\cdot\delta\vec{r_i}$$

$\boxed{\delta\vec{r_i} - \text{תזוזה וירטואלית}}$

ב הזזה קטנה.

$$\sum_i(\vec{F_i^T}-\dot{\vec{p_i}})\cdot\delta\vec{r_i}=0$$

$$\sum_i(\vec{F_i}+\vec{f_i}-\dot{\vec{p_i}})\cdot\delta\vec{r_i}=0$$

$$\sum_i(\vec{F_i}-\dot{\vec{p_i}})\cdot\delta\vec{r_i}+\sum_i\vec{f_i}\cdot\delta\vec{r_i}=0$$

מהגדרה של δr_i: $\sum_i\vec{f_i}\cdot\delta\vec{r_i}=0$

$$\sum_i(\vec{F_i}-\dot{\vec{p_i}})\cdot\delta\vec{r_i}=0$$

<u>הרעיון:</u> שינוי קואורדינטות

על מנת להיפטר מהאילוצים

כך שמשוואות ניוטון יהפכו למשוואות כאשר אין אילוץ:

$$\vec{F_i}-\overset{\text{II}}{\dot{\vec{p_i}}}\neq 0$$

$$\vec{F_i}-\dot{\vec{p_i}}=0$$

המכילות את האילוצים <u>בצורה ישירה.</u>

$$\sum_i(\vec{F_i}-\dot{\vec{p_i}})\cdot\delta\vec{r_i}=0$$

$$r_i(q_1,q_2,\dots,q_n,t)$$

$$\sum_i(\quad)\cdot\delta\vec{q_i}=0$$

$$(\quad)=0$$

נעשה טרנספורמציה [שינוי קואורדינטות]

כשה $\{q_i\}_{i=1}^{n}$ הם בלתי תלויים.

כי אם אפשר להפטר מ q_s ו q_{s+1} $\{q_i\}$

ואז נשתמש לפי זה צורה ב r_i

$$\forall i \quad \vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

העתקה וירטואלית נעשה רק ע"י קואורדינטות

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$r(q_1, q_2, q_3, \dots)$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2 + \dots$$

$$\sum_i \vec{F_i} \cdot \delta r_i - \sum_i \dot{\vec{p_i}} \delta r_i = 0$$

$$\sum_i \vec{F_i} \cdot \delta r_i = \sum_i \sum_j \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

כוחות מוכללים $\longrightarrow$ $Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$

Q_j - יכול להיות תלוי אחד בשני.

החלק השני:

$$\sum_i \dot{\vec{p_i}} \cdot \delta \vec{r_i} = \sum_i \sum_j m_i \ddot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j \left[\sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right) \right\} \right] \delta q_j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\vec{r_i}} \left[\sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial^2 \vec{r_i}}{\partial q \partial t} \right] \right\} \right) \delta q_j$$

כלל השרשרת

$$\sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j \left(\sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r_i}}}{\partial \dot{q_j}}\right) - m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r_i}}}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$\boxed{\frac{df(x,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \dot{\vec{r_i}} = \sum_k \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}}$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q_j}} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r_i}})^2\right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r_i}})^2 \right) \delta q_j$$

$$(\dot{\vec{r_i}})^2 = v_i^2$$

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}} \longrightarrow \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q_j}} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2\right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_i \dot{\vec{p_i}} \delta \vec{r_i}$$

$$\sum_i (\vec{F_i} - \dot{\vec{p_i}}) \cdot \delta \vec{r_i} = 0$$

$$0 = \sum_j \left\{ Q_j \delta q_j - \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q_j}} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] \delta q_j \right\}$$

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

$$T := \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T = Q_j}$$

עבור כוחות משמרים:

$$Q_j = \sum_i \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

$$F_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

נגיע באוילר-לגרנז':

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

V הוא פונקציה של קואו' בלבד.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}(T-V)=0$$

לגרנז'יאן:

$L:=T-V \leftarrow$ Lagrangian

$$\forall_j \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}L=0$$

תרגול 1:

יעקוב יודקין

yakov.yodkin@gmail.com

מכניקת לגרנז'יאן

לגרנז'יאן:

$$L=T-V$$

אנרגיה קינטית

אנרגיה פוטנציאלית

קרטזיות: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

גליליות: $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$

כדוריות: $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$

משוואות אולר-לגרנז':

$$1D: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \qquad L(x,\dot{x},t)$$

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$

$$3D: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

N מימדים:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad i=1....N$$

$3D: \; N=3$

$q_1=x \quad q_2=y \quad q_3=z$