

### הדרכה לפתרון תרגיל בחירה 3

נחלק למקרים:

• עבור  $a = 1$  קל למצוא את ערך הגבול ע"י הצבה (הציבו).

• כעת נניח  $a > 1$ .

1. הוכיחו שסידרת הממוצעים ההנדסיים של כל סידרה חיובית (ז"א  $\forall k, b_k \geq 0$ ) מתכנסת  $\rightarrow L$  מתכנסת  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , מתכנסת לגבולה המקורי, כלומר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n b_i} = L$$

אני מאפשר לכם להניח ש  $L \neq 0$  ליתר התרגיל.

(א) נעזר באי"ש הממוצעים.

i. נוכיח בהתחלה שאם  $b_n \rightarrow L$  אז גם  $\frac{\sum b_n}{n} \rightarrow L$ . נעשה זאת באמצעות הגדרת הגבול.

ii. ע"י אריתמטיקת גבולות אתם גם יכולים לדעת מה הגבול של הסדרה  $c_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$ . זה נובע מיידית מטענה  $i$  מעלה לאחר שמפעילים אותה על ממוצעי הסדרה  $\frac{1}{a_n}$  (למה?).

2. נפנה עכשיו להוכיח את הטענה הבאה:

**טענה:**

תהי סידרה חיובית  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  אזי:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

(א) נגדיר סידרה חדשה ע"י נוסחת נסיגה:  $b_1 = 1, b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

(ב) נפעיל על הסדרה הנ"ל את טענה 2 לקבל את ערך הגבול של  $\sqrt[n]{\prod b_i}$ .

(ג) סכמו שמכאן נקבל את הדרוש.

3. לפי הטענה האחרונה שהראנו, ניתן ע"י הצבה ישירה לחשב את ערך הגבול.