# <u>מד"ר: הנחיות לתרגול תשיעי</u>

1. פתרו את המשוואות או בעיות ההתחלה הבאות:

א. $$\begin{cases} y'''+2y''+y'=3x^2+2 \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$$

<u>סקירת שלבי הפתרון:</u>

בשלב הראשון, נפתור את ההומוגנית המתאימה: $y'''+2y''+y'=0$

משוואה עם מקדמים קבועים. האופיינית שלה היא:

$$r^3+2r^2+r=0 \Rightarrow r\left(r^2+2r+1\right)=0 \Rightarrow r\left(r+1\right)^2=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=r_3=-1$$

מכאן פתרון כללי להומוגנית המתאימה הוא:

$$y_h\left(x\right)=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x} \ \ , \ \ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$$

בשלב הבא, נחפש פתרון פרטי לאי-הומוגנית הנתונה באמצעות שיטת המקדמים הלא-מוגדרים:

צורת הפתרון הפרטי תהיה (לפי הטבלה בדף התיאוריה):

$$y_p\left(x\right)=x^s\left(Ax^2+Bx+C\right), A,B,C\in\mathbb{R}$$

וזאת מכוון שהאגף הימני של המשוואה, $g\left(x\right)=2x^2+3$ הוא פולינום ממעלה שנייה.

$s$ הוא מספר הפעמים (ריבוי) ש- $\alpha=0$ מופיע כשורש האופיינית ( $r$ ), לכן במקרה שלנו $s=1$. בסה"כ הפתרון הפרטי יהיה בצורה:

$$y_p\left(x\right)=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx \ , \ A,B,C\in\mathbb{R}$$

כעת נגזור את $y_p$ 3 פעמים:

$$y_p'\left(x\right)=3Ax^2+2Bx+C \ , \ y_p''\left(x\right)=6Ax+2B \ , \ y_p'''\left(x\right)=6A$$

ונציב במד"ר הלא-הומוגנית הנתונה:

$$y_p'''+2y_p''+y_p'=6A+2\cdot\left(6Ax+2B\right)+\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=3x^2+3\Rightarrow$$

$$3Ax^2+\left(12A+2B\right)x+\left(6A+4B+C\right)=3x^2+2$$

השוויון האחרון מתקיים לכל $x$, לכן נשווה מקדמים ונקבל את הפתרון הפרטי:

$$\begin{cases} 3A=3\Rightarrow A=1 \\ 12A+2B=0\Rightarrow B=-6 \\ 6A+4B+C=2\Rightarrow C=20 \end{cases} \Rightarrow y_p\left(x\right)=x^3-6x^2+20x$$

מכאן הפתרון הכללי הוא:

$$y_c\left(x\right)=y_h\left(x\right)+y_p\left(x\right)=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+x^3-6x^2+20x \ \ , \ \ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$$

כעת, אם נגזור ונציב תנאי התחלה (בפתרון הכללי שקיבלנו כעת!), נקבל בסופו של דבר: $C_1=-28 \, , C_2=28 \, , C_3=8$.

<u>התשובה הסופית היא:</u> $y\left(x\right)=-28+28e^{-x}+8xe^{-x}+x^3-6x^2+2x$.

ב. $y''+y'-2y=3xe^x$

<u>סקירת שלבי הפתרון:</u>

שוב, נתחיל מההומוגנית: $y''+y'-2y=0$.

האופיינית היא: $r^2+r-2=0 \Rightarrow r_1=-2, r_2=1$ ומכאן הפתרון הכללי להומוגנית
המתאימה הוא: $y_h(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x \ , \ C_1,C_2 \in \mathbb{R}$.
בשלב הבא, נחפש פתרון פרטי לאי-הומוגנית הנתונה באמצעות שיטת המקדמים הלא-מוגדרים:
צורת הפתרון הפרטי תהיה (לפי הטבלה בדף התיאוריה):

$$y_p(x)=x^se^x(Ax+B), A,B \in \mathbb{R}$$

וזאת מכוון שהאגף הימני של המשוואה, $g(x)=3xe^x$ הוא פולינום ממעלה ראשונה כפול אקספוננט עם המקדם בחזקה (במעריך) $\alpha=1$.
$s$ הוא מספר הפעמים (ריבוי) ש- $\alpha=1$ מופיע כשורש האופיינית ($r$), לכן במקרה שלנו $s=1$. בסה"כ הפתרון הפרטי יהיה בצורה:

$$y_p(x)=xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx), A,B \in \mathbb{R}$$

כעת נגזור את $y_p$ פעמיים:

$$y_p'(x)=e^x\left[Ax^2+(2A+B)x+B\right] \ , \ y_p''(x)=e^x\left[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B\right]$$

נציב ביטויים אלה במשוואה המקורית $y''+y'-2y=3xe^x$, נצמצם ב- $e^x \neq 0$ משני הצדדים, נסדר לפי חזקות יורדות של $x$ ונקבל: $6Ax+(2A+3B)=3x$. מהשוואת מקדמים מקבלים: $A=\frac{1}{2} \ , \ B=-\frac{1}{3}$ והפתרון הפרטי הוא:

$$y_p(x)=e^x\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x\right)$$

<u>תשובה סופית</u> (פתרון כללי):

$$y_c(x)=y_h(x)+y_p(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x+e^x\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x\right) \ , \ C_1,C_2 \in \mathbb{R}$$

2. מצאו את צורת הפתרון הפרטי עבור המשוואה:

$$y''-4y'+8y=\underbrace{x^2e^{3x}}_{g_1(x)}+\underbrace{e^{2x}\sin 2x}_{g_2(x)}\underbrace{-5}_{g_3(x)}$$

<u>אין צורך</u> לחשב את ערכי המקדמים הלא-מוגדרים.

<u>סקירת שלבי הפתרון:</u>
שוב, נתחיל מההומוגנית: $y''-4y'+8y=0$.
האופיינית היא: $r^2-4r+8=0 \Rightarrow r_{1,2}=2\pm 2i$ ומכאן הפתרון הכללי להומוגנית
המתאימה הוא: $y_h(x)=e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x) \ , \ C_1,C_2 \in \mathbb{R}$.
בשלב הבא, נחפש פתרון פרטי לאי-הומוגנית הנתונה באמצעות שיטת המקדמים הלא-מוגדרים:
נשים לב כי האגף הימני במשוואה המקורית מורכב מסכום של שלושה מחוברים, שכל מחובר מתאים למקרה אחר של השיטה, לכן נחפש פתרון פרטי בצורה:

$$y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+y_{p_3}(x)$$

כאשר $y_{p_1}(x)$ הוא פתרון פרטי של $y''-4y'+8y=\underbrace{x^2e^{3x}}_{g_1(x)}$,

$y_{p_2}(x)$ הוא פתרון פרטי של $y''-4y'+8y=\underbrace{e^{2x}\sin 2x}_{g_2(x)}$

ו-$y_{p_3}(x)$ הוא פתרון פרטי של $y''-4y'+8y=\underbrace{-5}_{g_3(x)}$.

לגבי $y_{p_1}(x)$, מכוון ש-$g_1(x)=x^2e^{3x}$, צורת הפתרון לפי הטבלה תהיה:

$$y_{p_1}(x)=x^se^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right),\ A,B,C\in\mathbb{R}$$

כאשר $s$ הוא מספר הפעמים (ריבוי) ש-$\alpha=3$ מופיע כשורש האופיינית ($r$), לכן במקרה שלנו, מכוון ששורשי האופיינית הם מרוכבים, $\alpha=3$ אינו שורש אופיינית, לכן $s=0$. בסה"כ:

$$y_{p_1}(x)=x^0e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)=e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right),\ A,B,C\in\mathbb{R}$$

לגבי $y_{p_2}(x)$, מכוון ש-$g_2(x)=1\cdot e^{\overbrace{\alpha}^{2x}}\cdot\sin\underbrace{2}_{\beta}x\Rightarrow\alpha=2,\beta=2$, צורת הפתרון לפי הטבלה תהיה:

$$y_{p_2}(x)=x^se^{2x}\left(D\cos 2x+E\sin 2x\right),\ D,E\in\mathbb{R}$$

כאשר $s$ הוא מספר הפעמים (ריבוי) ש-$\alpha+\beta i=2+2i$ מופיע כשורש האופיינית ($r$), לכן במקרה שלנו, מכוון ששורשי האופיינית הם $r_{1,2}=2\pm 2i$, $\alpha+\beta i=2+2i$ מופיע <u>פעם אחת</u> כשורש אופיינית, לכן $s=1$. בסה"כ:

$$y_{p_2}(x)=xe^{2x}\left(D\cos 2x+E\sin 2x\right),\ D,E\in\mathbb{R}$$

לגבי $y_{p_3}(x)$, מכוון ש-$g_3(x)=-5$ הוא פולינום ממעלה 0, צורת הפתרון לפי הטבלה תהיה:

$$y_{p_3}(x)=x^s\cdot F\ ,\ F\in\mathbb{R}$$

כאשר $s$ הוא מספר הפעמים (ריבוי) ש-$\alpha=0$ מופיע כשורש האופיינית ($r$), לכן במקרה שלנו, מכוון ששורשי האופיינית הם מרוכבים, $\alpha=0$ אינו שורש אופיינית, לכן $s=0$. בסה"כ: $y_{p_3}(x)=F\ ,\ F\in\mathbb{R}$.

בסה"כ, צורת הפתרון הפרטי היא:

$$y_p(x)=e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+xe^{2x}\left(D\cos 2x+E\sin 2x\right)+F\ ,\ A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$$

<u>הערה:</u> אם היו מבקשים לחשב את הפתרון הפרטי באופן מלא (המון עבודה...), היינו מציבים כל חלק של פתרון פרטי במשוואה שלו, לפי הפירוט לעיל, ומוצאים את המקדמים של כל חלק כזה בנפרד, ורק אחר כך מחברים את כל המרכיבים לפתרון פרטי אחד. אחרת, אם קודם נחבר, הגזירות וההצבות יהיו לא אנושיות....