אינפי 1 - פתרון לתרגיל 4

18 בנובמבר 2015

שאלה

מצאו את גבולה של הסדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 1+\frac{2}{a_n} & n>1 \end{cases}.$$

הוכחה

נציב ערכים נומריים לקבל תחושה בנוגע לסדרה שלנו:

$$a_1 = 1, a_2 = 1+\frac{2}{1} = 3, a_3 = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \ldots$$

ואמנם זו איננה סדרה מונוטונית אז צריך לעבוד קצת. נתבונן כעת בקפיצות של 2, האם הסדרה מונוטונית:

$$a_{n+2} = 1+\frac{2}{a_{n+1}} = 1+\frac{2}{1+\frac{2}{a_n}} = \frac{3a_n+2}{a_n+2}$$

רוצים לבדוק מתי זו סדרה מונוטונית (אם בכלל). בהוכחה שלי אראה לה"כ עבור מונטוניות יורדת אבל ע"י היפוך אי השיוויונות ניתן לקבל גם תנאי מתי זו סדרה מונוטונית עולה.

$$a_{n+2} = \frac{3a_n+2}{a_n+2} \le a_n \iff a_n^2 - a_n - 2 \ge 0 \iff a_n \ge 2 \vee a_n \le -1$$

המקרה השני נפסל מאחר שהסדרה שלנו חיובית (אינודקציה לא קשה) ומכאן נקבל שאם $a_n \ge 2$ אז הסדרה הנ"ל (איברים של a_n בקפיצות 2) היא מונטונית יורדת. זה לא אומר לצורך העניין שגם $a_{n+2} \ge 2$.[1]

מכאן אנחנו רוצים לבדוק עקביות, כלומר להוכיח את הטענה $a_n \ge 2 \Rightarrow a_{n+2} \ge 2$, אבל זה נובע מאי"ש ישיר [2]:

$$a_{n+2} = \frac{3a_n+2}{a_n+2} = 1+\frac{2a_n}{a_n+2} \ge 1+\frac{2a_n}{a_n+a_n} = 2$$

[1] לצורך העניין קחו את הסדרה $b_n = \begin{cases} 3 & n=2k+1 \\ 1 & n=2k \end{cases}$. תשימו לב שאם $b_n \ge 2$ אז אכן $b_{n+1} = 1 < b_n = 3$ אבל $b_{n+1} = 1 \ngeq 3$ ובפרט גם לא מתקיים ש$1 < 3$.

[2] חלקכם עשה אינדוקציה שזה עובד אבל במבחן אני מציע שתעדיפו את הפתרון הנכון והקצר על רעהו הנכון והארוך.

מכאן שהראנו עקביות ומונוטוניות. אם תהפכו את כל האי"ש כאן בדיוק תקבלו את המצב בו זו סדרה מונטונית עולה. אם נסכם:

1. האיברים בקפיצות שתיים במקומות הזוגיים הם סדרה מונוטונית יורדת.
2. האיברים בקפיצות 2 במקומות אי זוגיים הם סדרה מונטונית עולה.

חסימות (נובעת מעקביות):

- סדרה 1 חסומה מלרע ע"י 2 ולכן מתכנסת.
- סדרה 2 חסומה מלעיל ע"י 2 ולכן מתכנסת.

מכאן קיבלנו שתת הסדרה $\{a_{2k}\}$ מתכנסת וגם $\{a_{2k+1}\}$ מתכנסת. זה אומר שa_n תתכנס אמ"מ לשתי סדרות אלו יהיה גבול משותף. מאחר שאף אחד לא הוכיח את זה מדויק, הנה הוכחה: נניח בשלילה שa_n איננה מתכנסת לגבול המשותף שנסמנו להיות L. אזי קיים ε_0 כך ש:

$$\forall n_0 \exists n > n_0 : |a_n - L| \geq \varepsilon_0.$$

אולם שתי הסדרות מעלה מתכנסות לL אז עבור ערך זה של אפסילון ניתן לבחור $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > K$:

$$|a_{2k} - L| < \varepsilon_0 \wedge |a_{2k+1} - L| < \varepsilon_0$$

אבל לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ הוא מהצורה $n_0 = 2k_0 \vee n_0 = 2k_0 + 1$. אם ניקח $N = 2K + 2$ אז לכל $n_0 > N$, מקבלים ש$k_0 > K$ ואמנם $|a_{n_0} - L| < \varepsilon_0$ בסתירה לכך ש$|a_n - L| \geq \varepsilon_0$.
כעת ניתן לחשב את הגבול:

$$\begin{aligned} \lim a_{n+2} &= \lim a_n \\ \lim \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} &= \lim a_n \\ \frac{3L + 2}{L + 2} &= L \iff \boxed{L = 2} \end{aligned}$$

(האפשרת השנייה נפסלת מאחר שקל לראות שהסדרה שלנו חיובית). נסכם: לסדרה המקורית יש גבול והוא 2.