חשבון אינפי 1

תרגיל 4- פתרון

.1

הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן

(א) $a_1 = \sqrt{6},\ a_{n+1} = \sqrt{6a_n}$

(ב) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$

(ג) $a_1 = 1/10,\ a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$

פתרון:

(א) $a_1 = \sqrt{6},\ a_{n+1} = \sqrt{6a_n}$

הוכחה: נראה באינדוקציה כי a_n מונוטונית עולה וחסומה ע"י 6.

מונוטוניות: עבור $n = 1$ מתקיים $a_2 = \sqrt{6\sqrt{6}} > \sqrt{6}$. נניח כי עבור n כלשהוא מתקיים $a_{n+1} > a_n$. אזי מתקיים $a_{n+2} = \sqrt{6a_{n+1}} > \sqrt{6a_n} = a_{n+1}$. כעת נראה כי $a_n < 6$ לכל n. ברור כי $a_2 = \sqrt{6\sqrt{6}} < 6$. נניח כי $a_n < 6$ עבור n כלשהוא. אזי $a_{n+1} = \sqrt{6a_n} < \sqrt{6 \cdot 6} = 6$. כלומר a_n מוטונית עולה וחסומה, לכן מתכנסת. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ ונקבל את המשוואה $l = \sqrt{6l}$ שפתרונה הוא $l = 6$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\} = 6$.

(ב) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$

נוכיח כי הסדרה מונוטנית יורדת, כלומר $a_{n+1} - a_n < 0$.

$a_{n+1} - a_n = (a_n + 1/a_n)/2 - a_n = (a_n + 1/a_n - 2a_n)/2 = (1/a_n - a_n)/2.$ כלומר יש להראות כי $a_n > 1$. ברור כי $a_1 = 10 > 1$. נניח כי $a_n > 1$ עבור n כלשהוא, ונניח בנוסף כי הטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2 > 1$. נקבל $a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 > 0$, או $a_n > 1$ וסיימנו. נשים לב כי הראנו גם כי $\{a_n\}$ חסומה מלרע ע"י 1 ולכן מתכנסת. נסמן $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ ונקבל $l = (l + 1/l)/2$, ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\} = 1$

(ג) $a_1 = 1/10,\ a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. (הוכחה באינדוקציה דומה לזו שב 3ב החל מ $n = 2$.)

.2

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת משפט הסנדויץ'

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\sin 1 + 2\sin 2 + \ldots + n\sin n}{n^3}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n}$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right)$

פתרון:

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\sin 1 + 2\sin 2 + \ldots + n\sin n}{n^3}$

$0 \le \left|\frac{1\sin 1 + 2\sin 2 + \ldots + n\sin n}{n^3}\right| \le \frac{|1\sin 1| + |2\sin 2| + \ldots + |n\sin n|}{n^3} \le \frac{1+2+\ldots+n}{n^3} <$
$\frac{n\cdot n}{n^3} = \frac{1}{n}$

ע"פ משפט הסנדויץ' $\left|\frac{1\sin 1 + 2\sin 2 + \ldots + n\sin n}{n^3}\right| \to 0$

ולכן $\frac{1\sin 1 + 2\sin 2 + \ldots + n\sin n}{n^3} \to 0$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n}$

ע"פ מבחן המנה $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\frac{10^n}{n!} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} > 1$, נקבל כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n} = \infty$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right)$

$\frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+n}$. כעת, $\frac{n}{n^2+n} \to 0$ וגם
$\frac{n}{n^2+1} \to 0$ ולכן, ע"פ משפט הסנדויץ' $\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \to 0$

3.

חשבו את הגבולות הבאים

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2-2}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$

(ד) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

(ה) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}$

(ו) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots\frac{n-1}{n^2}$

(ז) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(ח) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)}{n!}$

(ט) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n}$

(י) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

(יא) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$

(יב) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{3n^2+3n+5}$

(יג) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(ne^5)}{\ln n}\right)^{\ln n}$

בס"ד

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2-2}$$ (א)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n-2/n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})$$ (ב)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1+1/n-1/n^2}}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$$ (ג)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5-n^3+n^4-n^2}+\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^3-n}-n}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/n^2+1/n-1/n^3}+\sqrt{1/n+1/n^2}-\sqrt{1/n^2-1/n^4}-1/n^{10}}{\sqrt{1/n+1/n^4}-\sqrt{1/n^2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$ (ד)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\frac{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^2/n^2+2n/n^2+1/n^2}+\sqrt[3]{n^2/n^2+n/n^2}+\sqrt[3]{n^2/n^2}}=\frac{0}{1}=0$$

(ה) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(ו) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... \frac{n-1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+...+n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

(ז) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}\frac{(n+1)!}{2n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

(ח) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-1)}{n!}$

ע"פ מבחן המנה $= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-1)}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1$ ולכן הגבול המבוקש הוא ∞.

(ט) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + (-1)^n + 7^n}$

$7 = \sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n + (-1)^n + 7^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = 7\sqrt[n]{3}$ ולכן, ע"פ משפט
הסנדויץ' $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + (-1)^n + 7^n} = 7$

(י) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\dots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\dots\cdot\sqrt[2^n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{2}}$. כעת $1 < \sqrt[2^n]{2} < \sqrt[n]{2}$ ולכן ע"פ משפט הסנדויץ' $\sqrt[2^n]{2} \to 1$ והגבול המבוקש הוא 2.

(יא) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\dots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$

ע"פ מבחן המנה $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}+\sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2}-1 < 1$
ולכן הגבול המבוקש הוא 0.

(יב) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{3n^2+3n+5}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{3n^2+3n+5} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+n}\right]^{\frac{3n^2+3n+5}{n^2+n}} = e^3$$

(יג) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(ne^5)}{\ln n}\right)^{\ln n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(ne^5)}{\ln n}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(\ln n)/5}\right)^{(\ln n)/5}\right]^5 = e^5$$