

תרגול כיתה 4 - פונקציות מדידות

הגדרנו בהרצאה כי אם (X, S) הינו מרחב מדיד אז $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ הינה מדידה אם מתקיים:

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in S \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ לכל}$$

1. שאלה: האם הפונקציה הבאה הינה מדידה בורל?

$$T(x) = \begin{cases} \sin 2x & x > 0 \\ 1 + \cos x & x \leq 0 \end{cases}$$

פתרון: נגדיר את הפונקציות

$f(x) = I_{(0, \infty)}(x)$ ואת $h(x) = I_{(-\infty, 0]}(x)$. אלו פונקציות מדידות שכן הקטעים $(0, \infty)$ $[-\infty, 0]$ הינם מדידים בורל. ראינו בהרצאה כי מכפלה של פונקציות מדידות הינה מדידה ולכן נקבל

$$T(x) = (\sin 2x) I_{(0, \infty)}(x) + (1 + \cos x) I_{(-\infty, 0]}(x)$$

הינה מדידה בורל.

תזכורת: הכללנו בהרצאה כי אם $E \in S$ אז הפונקציה $f : E \rightarrow \mathbb{R}^*$ תקראה מדידה אם

$$\{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in S$$

2. תרגיל: תהי f פונקציה בעלת תחום מדיד D . הראה כי f מדידה אמ"מ הפונקציה g המוגדרת על \mathbb{R} ע"י $f(x) = g(x)$ לכל $x \in D$ ו $g(x) = 0$ עבור $x \notin D$ מדידה.

פתרון:

\Leftarrow : נניח כי f מדידה. אם $\alpha > 0$, אזי $\{x : g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\}$ וזו קבוצה מדידה. אם $\alpha \leq 0$, אזי $\{x : g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} \cup D^c$ שגם היא מדידה. לכן g מדידה.

\Rightarrow : נניח g מדידה. אזי $f = g|_D$ ומכיוון ש D מדידה אז f מדידה.

3. יהי (X, S) מרחב מדיד ויהיו $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ו $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות מדידות לבג ובורל בהתאמה. הראו כי $h = g \circ f$ מדידה לבג.

פתרון: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה בורל, אזי $h^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. מכיון ש g מדידה בורל נובע כי $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. מכיון ש f מדידה לבג נובע כי $f^{-1}(g^{-1}(A))$ מדידה לבג ומכאן ש h מדידה לבג.

4. ראינו בהרצאה כי פונקציה f מדידה S הינה פונקציה המקיימת $\{x | f(x) \leq \alpha\} \in S$ עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$. הראו כי הגדרה שקולה הינה: פונקציה f מדידה S הינה פונקציה המקיימת $f^{-1}(A) \in S$ לכל קבוצה A מדידה בורל.

פתרון: ברור כי ההגדרה השניה גוררת את ההגדרה הראשונה. כעת נוכיח כי ההגדרה הראשונה גוררת את השניה. נניח כי S הינה סיגמא אלגברה מעל X . נראה כי קבוצת כל הקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימות $f^{-1}(A) \in S$ הינה סיגמא אלגברה. נסמן קבוצה זו ב \mathfrak{B} .

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = X \in S \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathfrak{B} \quad .i$$

$$.ii \quad \text{אם } f^{-1}(A) \in S, \text{ כלומר } A \in \mathfrak{B} \text{ אז } f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in S \text{ ולכן } A^c \in \mathfrak{B}.$$

$$.iii \quad \text{אם } f^{-1}(A_n) \in S, \text{ כלומר } A_n \in \mathfrak{B}, \text{ אזי } f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(A_n) \in S,$$

כלומר $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{B}$. מכאן כי \mathfrak{B} הינה סיגמא אלגברה.

כעת, עפ"י ההגדרה הראשונה ברור כי $(-\infty, \alpha] \in \mathfrak{B}$ עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$. מכאן ש \mathfrak{B} הינה סיגמא אלגברה המכילה את הקטעים מהצורה $(-\infty, \alpha]$ ולכן מכילה את כל הקבוצות המדידות בורל.

5. תהי \mathcal{E} משפחה של תת קבוצות ב X ו $A \subseteq X$, אזי נגדיר $A \cap E = \{A \cap B | B \in E\}$ יהי (X, ρ) מרחב מטרי עם טופולוגיה T וסיגמא אלגברה בורל S ותהי $A \subseteq X$. הראו כי ל (A, ρ) יש טופולוגיה $T_A = A \cap T$ ו סיגמא אלגברה בורל $S_A = S \cap A$.

פתרון: עפ"י ההגדרה של טופולוגיה מושרית ברור כי $T_A = A \cap T$. השיכון הטבעי

$$I_A : A \rightarrow X \text{ הינו רציף ולכן נותר להראות כי } S_A = S \cap A$$

$S_A \supseteq S \cap A$: השיכון הטבעי $I_A : A \rightarrow X$ הינו רציף ולכן מדיד. מכאן ש

$$S \cap A = I_A^{-1} S \subseteq S_A$$

$$S_A = \sigma(T_A) = \sigma(A \cap T) \subseteq \sigma(A \cap S) = A \cap S : S_A \subseteq S \cap A$$

השוויון האחרון נובע מכך שהראנו כי $S \cap A$ הינה סיגמא אלגברה.

6. יהי (X, S) מרחב מדיד ויהיו $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ו $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות מדידות לבג

ובורל בהתאמה. הראו כי $h = g \circ f$ מדידה לבג.

פתרון: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה בורל, אזי $h^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. מכיוון ש g מדידה

בורל נובע כי $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. מכיוון ש f מדידה לבג נובע כי $f^{-1}(g^{-1}(A))$

מדידה לבג ומכאן ש h מדידה לבג.

7. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב -1

ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:

i. $\alpha \in f(\mathbb{R})$: אזי מהמונוטוניות של f נקבל כי

$$\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\alpha), \infty)$$

ii. $\alpha \notin f(\mathbb{R})$: נגדיר את β להיות $\beta = \inf\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$. אזי

$$א. \{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\beta), \infty)$$

$$ב. \{x \mid f(x) \geq \alpha\} = (f^{-1}(\beta), \infty)$$

בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה.

פונקציות אלמנטריות הן מהצורה:

$$I_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

וראינו כי פונקציה אלמנטרית זו מדידה אמ"מ $E \in S$.

פונקציות פשוטות מדידות הן מהצורה:

$$\sum_{i=1}^n a_k I_{E_k}(x)$$

כאשר a_k הינם סקלרים ו E_k הינן קבוצות מדידות. ראינו גם כי לכל פונקציה פשוטה יש הצגה קנונית:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_k I_{E_k}(x)$$

כאשר לכל k $E_k = \{x \in X : \varphi(x) = a_k\}$ כאשר כל ה a_k שונים.