תרגיל. תהא $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת

$$S\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

מצאו $[S]_B^{B'}$ ומצאו את $\operatorname{Ker}(T\circ S)=\{v:T\circ S(v)=0\}$

פתרון:

$$[S]_B^{B'}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_B & \left[S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_B \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

כעת:

$$\begin{aligned}
Ker\,(T\circ S) &= \{v|T\circ S\,(v)=0\} \overset{(1)}{=} \\
&= \{v|\,[T\circ S\,(v)]_{B'}=0\} \overset{(2)}{=} \\
&= \left\{v|\,[T\circ S]_{B'}^{B'}\,[v]_{\,B'}=0\right\} \overset{(3)}{=} \\
&= \left\{v|\,[T]_{B'}^{B}\,[S]_{B}^{B'}\,[v]_{\,B'}=0\right\} \overset{(4)}{=} \\
&= \left\{v|\begin{pmatrix}2&4&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}[v]_{\,B'}=0\right\} \overset{(5)}{=} \\
&= \left\{v|\begin{pmatrix}2&4\\-1&-1\end{pmatrix}[v]_{\,B'}=0\right\} \overset{(6)}{=} \\
&= \{v|\,[v]_{\,B'}=0\} \overset{(7)}{=} \left\{\overrightarrow{0}\right\}
\end{aligned}$$

1. לכל בסיס Bמתקיים $[0]_B=0$ (יכולים להוכיח בעזרת כלים של לינארית 1) לכן אם $T\circ S\,(v)=0$ אז ווקטור הקורדינאטות שלו גם כן שווה ל-0 כלומר $[T\circ S\,(v)]_{B'}=0$.
2. עבור העתקה לינארית $L:V\to V$ מתקיים $[L]_{B'}^{B'}\,[v]_{\,B'}=[L\,(v)]_{B'}$ לכן אם ניקח $L=T\circ S$ נקבל,$[T\circ S]_{B'}^{B'}\,[v]_{\,B'}=[T\circ S\,(v)]_{B'}$
3. יהיו $\underset{F\text{בסיס}}{W}\to\underset{E\text{בסיס}}{U}:S,\ \underset{H\text{בסיס}}{V}\to\underset{F\text{בסיס}}{W}:T$ העתקות לינארית אז $[T\circ S]\,{}_H^E=[T]\,{}_H^F\,[S]\,{}_F^E$, כלומר המטריצה המייצגת של ההרכבה היא כפל המטריצות המייצגות.
4. את המטריצות המייצגות $[T]\,{}_H^F,\ [S]\,{}_F^E$מצאנו בסעיפים הקודמים.
5. כפל מטריצות.

6. המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ הפיכה לכן אם $v = 0$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ אז $v = 0$.

7. אם ווקטור הקארדינאטות שווה ל- $\overrightarrow{0}$ אז הווקטור עצמו שווה ל- $\overrightarrow{0}$.