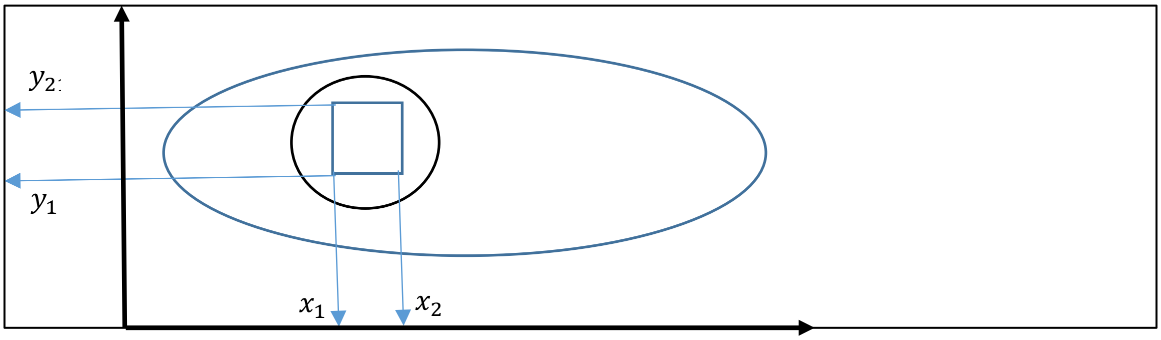
מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 5 - פתרון

1. א' הוכיחו: $\mathbb{Q}^2$ צפופה ב-$\mathbb{R}^2$

הוכיחה

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה ולא ריקה. אזי קיימים $p \in U$ ו- $r > 0$ כך ש- $B(p,r) \subseteq U$



ידוע (תיכון, גאומטריה אוקלידיתת, היה גם בהרצאות וכו"ל) שבתוך העיגול (כדור) $B(p,r)$ קיים ריבוע $A \subseteq B(p,r)$ (ראה השרטוט). יהיו קודקודיו של A : $(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_1,y_2)$ כך ש-$x_1 < x_2$ ו- $y_1 < y_2$.

אזי (מהלימודים הקודמים) קיימים $q_x, q_y \in \mathbb{Q}$, כך ש- $x_1 < q_x < x_2$ ו- $y_1 < q_y < y_2$. לכן $(q_x,q_y) \in A \cap \mathbb{Q}^2 \subseteq U \cap \mathbb{Q}^2$. כלומר, $U \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$, וזה מוכיח $\mathbb{Q}^2$ צפופה במשורת מש"ל.

ב' יהי X מ"ט $A,U \subseteq X$ כך ש- A,U צפופות ב-X ו-U פתוחה.

הוכיחו ש-$A \cap U$ צפופה ב- X .

הוכיחה: תהי V פתוחה ולא ריקה. כיוון ש- U צפופה ב-X , $U \cap V \neq \emptyset$.

כיוון ש- A צפופה ב-X , $A \cap (U \cap V) \neq \emptyset$.

לכן $(A \cap U) \cap V = A \cap (U \cap V) \neq \emptyset$, כלומר, $A \cap U$ צפופה ב-X, מש"ל.

2. יהיו X מרחב טופולוגי ו-M מרחב מטרי.

תהא תת-קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ב-X ויהיו $f,g: X \to M$ שתי פונקציות רציפות כך ש- $f|_A = g|_A$.

הוכיחו ש- $f = g$.

<u>הוכחה.</u>

<u>תענת עזר.</u> במרכב מטרי לכל שתי נקודות $a \neq b$ קיימות סבובות $U_a \ni a$ ו- $U_b \ni b$ כך ש- $U_a \cap U_b = \emptyset$.

<u>הוכיחת התענה:</u> אפשר לקחת $U_a = B(a,r)$ ו- $U_b = B(b,r)$ כאשר ($0 < r \leq \frac{d(a,b)}{2}$). אזי לפי אי שיוויון המשולש הכדורים זרים, מש"ל.

<u>המשך הוכחה.</u>

נניח – <u>בשלילה</u> - שקיימת $x \in X$ כך ש- $f(x) = a \neq b = g(x)$. אזי לתענת העזר קימות סביבות $a \in U_a$ ו- $b \in U_b$ כך ש- $U_a \cap U_b = \emptyset$.

מהרציפות פונקציות f, g מקבלים ש- $f^{-1}(U_a)$ ו- $g^{-1}(U_b)$ פתוחות.

חוץ מזה, $x \in f^{-1}(U_a) \cap g^{-1}(U_b)$ ולכן $f^{-1}(U_a) \cap g^{-1}(U_b)$ פתוחה ולא ריקה. אזי קיים $p \in A \cap f^{-1}(U_a) \cap g^{-1}(U_b)$. זה אומר ש-$f(p) \in U_a \cap U_b = \emptyset$. <u>סתירה.</u>

3. נתבונן בשני תת-מרחבים $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$, כאשר:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 5\}$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + 3y + z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 4x + 5y + z = 0\}$$

<u>הוכיחו/הפריכו</u> אם X ו-Y הומאומורפיים.

<u>הוכחה</u>. יהי $p = (x, y. z) \in \mathbb{R}^3$. אז נסמן $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ כך ש-

$$f_1(p) = x + y + z$$
$$f_2(p) = 2x + 3y + z$$
$$f_3(p) = 4x + 5y + z$$

ו-

$$P_1 = \{p \in \mathbb{R}^3 |\ f_1(p) = 0\}$$
$$P_2 = \{p \in \mathbb{R}^3 | f_1(p) = 5\}$$
$$P_3 = \{p \in \mathbb{R}^3 | f_2(p) = 0\}$$
$$P_4 = \{p \in \mathbb{R}^3 | f_3(p) = 0\}$$

אזי $X = P_1 \cup P_2$ ו- $Y = P_3 \cup P_4$.

קל להוכיח (אם לא הוכח בקורסים הקודמים) שכל הפונקציות הלניאריות $f_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ רציפות (באזרת סדרות, למשל).
אזי $f_1^{-1}(\{0,5\}) = X$, $f_1|_X$ רציפה כצימצום של רציפה ו- $f_1|_X\colon X \to \{0,5\}$.
כלומר, $f_1|_X$ פונקציה רציפה על טווח דיסקרטי בן שתי נקודות. לכן המרחב X <u>לא קשיר</u> (ההרצאות, קריטריון הקשירות).

<u>למה.</u> כל תת קבוצה $P \subset \mathbb{R}^3$ מסוג:

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = d\}$$

כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$ קבועים, (הנקראות *מישור במרחב* $\mathbb{R}^3$) היא קבוצה קמורה (ההרצאה).

<u>הוכחת למה.</u>

יהיו $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2) \in P$). אזי:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 = d$$

לכל $t \in [0,1]$ מקבלים:

$$a(1-t)x_1 + b(1-t)y_1 + c(1-t)z_1 = (1-t)d$$
$$atx_2 + bty_2 + ctz_2 = td$$
$$\Downarrow$$
$$a((1-t)x_1 + tx_2)$$
$$+b((1-t)y_1 + ty_2)$$
$$+c((1-t)z_1 + tz_2)$$
$$= (1-t)d + td = d$$

כלומר , הנקודה $p = (1-t)p_1 + tp_2$ שייכת ל-P. לכן P קמורה, מש"ל.

לפי הלמה, P_3, P_4 קמורות ולכן קשירות מסילתית.
נעיר שהנקודה $O(0,0,0)$ שייכת ל-$P_3 \cap P_4$. לכן אם $q_1, q_2 \in Y = P_3 \cup P_4$

אז קיימות שתי מסילות: γ_1 מ- q_1 ל-O (כי P_3 קשירה מסילתית)
ו- γ_2מ- O ל-q_2 (כי P_4 קשירה מסילתית).
השירשור $\gamma_1 * \gamma_2$ יוצר מסילה מ- q_1 ל-q_2. אז Y תת מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.
מסקנה: Y הוא לא הומאומורפי למרחב הרשיר X.

4. <u>תזכרת</u>

נסמן ב-$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה-n שלה הוא מספר x_n.

תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, , x_n \in \mathbb{R} \middle| \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty \right\}$$

<u>נזכיר שהוכח בתרגיל כיתה 4 (בעיה 2)</u> שפונקציה $d\colon l_\infty \times l_\infty \to [0,\infty)$ כאשר $d_\infty((x_n)\, , (y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|\}$, מהווה מטריקה על l_∞.

יהי בנוסף: X קבוצת הסדרות כך ש-$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} | \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

<u>הוכיחו:</u>

א) $X \subseteq l_\infty$,
ב) הקבוצה F של הסדרות מסוג $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0,0, \dots)$ (ז"א, הסדרות עם מספר סופי של איברים הלא אפסיים) היא תת-קבוצה ב-X.
ג) F צפופה ב-X בטופולוגיה המושרת על ידי המטריקה d.

<u>פתרון</u>

א) יהיה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. אזי $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ – לפי שעשינו בבית וגם בכיתה – כל איבריה של הסדרה החל ממספר N מסוים נמצאים בתוך כדור. אם נגדיל את הרדיוס של הכדור כך שגם קבוצה סופית $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ תימצא בכדור המוגדל, אז נקבל שהסדרה חסומה, ז"א, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, מש"ל.

ב) יהיה $F \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. אזי כל איבריה של הסדרה החל ממספר N מסוים שווים ל-0. אזי (תרגיל בית 1, שאלה 6) הסדרה קבועה לבסוף ו-0 $= \lim_{n\to\infty} x_n$, זאת אומרת, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, מש"ל.

ג) צריך להוכיח ש-$\bar{F} = X$.
יהיה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ ותהי U סביבה של $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$B\big((x_n),\varepsilon\big) \subseteq U$.
כיוון ש-$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, אז $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. לפי הגדרת הגבול קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$|x_n| < \varepsilon$ כאשר $n \geq n_0$.
אם אנחנו אכשיו נתבונן בסדרה $(y_n) = \big(x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, 0,0, \dots\big)$,
אז נראה ש-$(y_n) \in F$ ונקבל:

$$d_\infty((x_n)\,,(y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| =$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_1 - x_1|, \dots, |x_{n_0-1} - x_{n_0-1}|, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \dots\} =$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{0, \dots, 0, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \dots\} < \varepsilon.$$

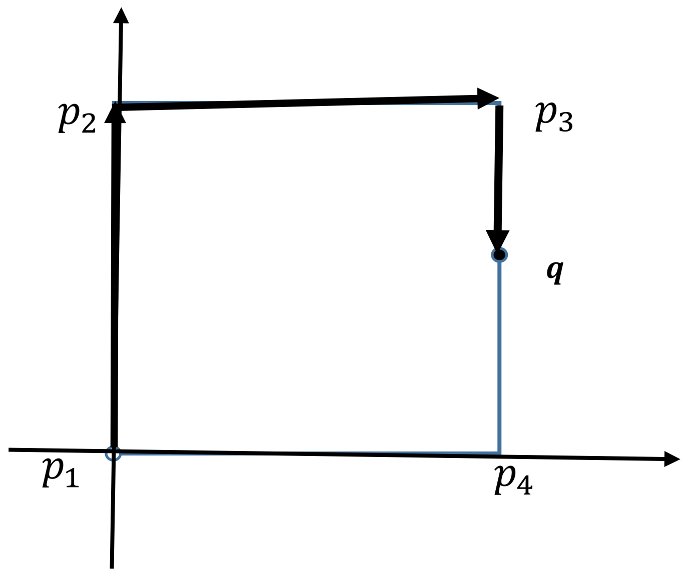
זאת אומרת, $(y_n) \in B\big((x_n),\varepsilon\big) \subseteq U$, ולכן $U \cap F \neq \emptyset$.
אז הוכחנו בעצם שכל סביבה של (x_n) נחתכת עם F. זה אומר ש- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{F}$, מש"ל.

5. נתבונן ברבוע Q במשור $\mathbb{R}^2$ עם הקודקדים: $(1,0)(1,1),(0,1),(0,0)$.
ז"א:

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

<u>הוכיחו</u> ש-Q אינו הומאומורפי ל-$\mathbb{R}$, ולשום קטע (פתוח, סגור או חצי סגור) ב-$\mathbb{R}$ ולשום קרן (פתוחה או סגורה מצד אחד) ב-$\mathbb{R}$.

<u>הוכחה.</u>



כל קטע שהוא חלקו של צלע הריבוע אפשר להציג כתמונה של המסילה $\gamma:[0,1]\to Q$ שמחברת שני קצוות הקטע p ו- p': (הארצאה)

$$(*)\ \gamma(t)=(1-t)p+tp'$$

ברור מהשרטוט:

- כל שתי נקודות ב-Q אפשר לחבר על ידי מסילה של סוג (*) או על ידי מסילה Γ המשורשרת ממסילות של סוג (*).
- יתרה מזה, אם להסיר מ-Q נקודה q כלשהי עדיין יהיה אפשר לחבר כל שתי נקודות ב-$Q-\{q\}$ במסילה Γ המשורשרת.

מזה נובע ש- $Q-\{q\}$ מרחב קשיר מסילתית.

נניח עכשיו ש- $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע מסוג כלשהו ונניח - <u>בשלילה</u> - שקיים הומאומורפיזם $i: I\to Q$. ברור ש- I אינו נקודון כי i העתקת על. לכן קיימת נקודה $p\in I$ כך ש- $I-\{p\}$ אחוד של שני קטעים (אינו קשיר מסילתית). נסמן: $q=i(p)$, $I^-=\ I-\{\,p\}$, $Q^-=Q-\{q\}$. אזי העתקה $i|_{I^-}: I^-\to Q^-$ עדיין הומאומורפיזם . כמו גם ההפוכה לה: $j: Q^-\to I^-$. אבל כמו שהוכחנו למעלה, $Q^-=Q-\{q\}$ קשירה מסילתית ולכן גם תמונתה $j(Q^-)=I^-$. <u>סתירה</u>.

6. יהי $X=\{a,b\}$ ו- (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר ולא טריוויאלי. מיצאו כל הטופולוגיות τ המקימות את התנאי הזה.

פתרון:

קבוצה של כל התת-קבוצות של X היא: $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$.

כל טופולוגיה מכילה $\emptyset$ ו-X. לפי התנאח שלנו הטופולוגיה המבוקשת - הלא טריוויאלית - חייבת להכיל $\{a\}$ או $\{b\}$.

להכיל גם $\{a\}$ וגם $\{b\}$ היא לא יכולה כי במקרה הזה היא תהיה דיסקרתית ולכן המרחב היה לא קשיר! נשארו רק שתי אפשרויות: $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ו- $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

קל לבדוק ששתיהן באמת טופולוגיות.

המרחבים (X,τ_1), (X,τ_2) קשירים כי אפרות היחידה לפצל X לתת-קבוצות לא ריקות היא $X=\{a\}\cup\{b\}$. אבל בשתי הטופולוגית $\{a\},\{b\}$ לא פתוחות בו זמנית.

תשובה: $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ו- $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

7. יהי $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x=y\}$.

א) הוכיחו ש- L *קבוצה קשירה מסילתית*

הוכחה

נוכיח ש-L קמורה. יהיו $p_1(x_1,y_1), p_2(x_2,y_2)\in L$.

אזי $x_1=y_1$ ו- $x_2=y_2$. לכן הקואורדינטות של הנקודה $p=(1-t)p_1+tp_2$ (קאשר $t\in[0,1]$)

הן שוות זו לזו : $(1-t)x_1+tx_2=(1-t)y_1+ty_2$ ולכן $p\in L$.

הוכחנו ש-L קמורה, ולכן כמו שהוכח בהרצאה, קשיקה מסילתית.

ב) *יהיו :*

$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x<y\};$

$V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>y\}$

הוכיחו ש- U,V רכיבי קשירות של המרחב L^c.

__הוכחה__

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *כך ש-* $f((x,y))=x-y$.

נוכיח שהפונקציה f *רציפה בכל נקודה* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$(x_n,y_n)\to(a,b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max\{|x_n-a|,|y_n-b|\}=d_{max}\big((x_n,y_n),(a,b)\big)\to 0$$
$$\Rightarrow |x_n-a|\to 0, |y_n-b|\to 0$$
$$\Rightarrow |x_n-y_n-(a-b)|\le |x_n-a|+|y_n-b|\to 0$$
$$\Rightarrow x_n-y_n\to a-b$$
$$\Rightarrow f((x_n,y_n))\to f(a,b)$$

לכן f *רציפה על* $\mathbb{R}^2$. *מזה מובע ש-*

$U=f^{-1}(-\infty,0), V=f^{-1}(0,\infty)$ *קבוצות פתוחות ב-*$\mathbb{R}^2$ *ולכן* *גם פתוחות ב-*L^c.

הן גם קמורות: לכל שתי נקודות ב-U $p_1(x_1,y_1)p_2(x_2,y_2)$ *מתקיים:*

$$x_1-y_1<0, x_2-y_2<0$$

לכן לכל $t\in[0,1]$

$$(1-t)x_1+tx_2-(1-t)y_1-ty_2=$$
$$(1-t)(x_1-y_1)+t(x_2-y_2)<0$$

כלומר, $(1-t)p_1+tp_2\in U$.

אותו דבר מתקיים לגבי V.

אזי V,U קשירות מסילתית ולכן קשירות.

לפי הגדרה שלהן: $U\cup V=L^c$

נניה – __בשלילה__ – ש-U לא רכיב קשירות של L^c , אזי קיים רכיב קשירות C של L^c כך ש- $U\subset C \subseteq L^c$. זה אומר ש- $C\cap V\neq\emptyset$.

אז קיבלנו ש- $C=(C\cap U)\cup(C\cap V)$ אחוד של שתי קבוצות פתוחות ב-C , לא ריקות ולא נחתכות. אז C אינו קשירה. אבל רכיב קשחרות קשיר, סתירה.

בותה דרך מוכחחים ש-V רכיב קשירות של L^c.