אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 2

1. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע בעל מידה (אורך) חיובית. ניקח תת-קטע פתוח $(a,b) \subseteq I$ שגם הוא בעל מידה חיובית, ונתבונן בהעתקה הלינארית $f(x) = a + (b-a)x$. f מעתיקה את $(0,1)$ על (a,b) , ולכן הקבוצה הלא מדידה $E \subseteq (0,1)$ שבנינו בהרצאה מועתקת לקבוצה $F := f(E) \subseteq (a,b) \subseteq I$ שחייבת גם היא להיות לא מדידה. אילו $F = f(E)$ הייתה מדידה ההעתקה הלינארית ההופכית f^{-1} הייתה מעתיקה אותה אל E , ובתרגול ראינו שהעתקות לינאריות מעתיקות קבוצות מדידות לקבוצות מדידות!

2.

א. C סגורה כחיתוך של הקבוצות הסגורות $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$. C חסומה שכן כל איבריה נמצאים בקטע החסום $[0,1]$. משפט היינה-בורל אומר שקבוצת קנטור קומפקטית.

ב. תהי $U \subseteq C$ קבוצה פתוחה. נניח בשלילה כי $U \neq \varnothing$ אזי ישנו קטע פתוח לא ריק $(a,b) \subseteq U \subseteq C$. ע"פ מונוטוניות נקבל $b-a \le m(C)$, אך זו סתירה כי $m(C)=0$. מכאן $\operatorname{int}(C) = \bigcup_{\substack{U \subseteq C \\ \text{U is open}}} U = \varnothing$ כנדרש.

ג. נניח בשלילה כי $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, כאשר $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ הם קטעים סגורים. C לא מכילה קטעים ממידה חיובית ולכן $m(I_n)=0$ לכל n, כלומר $I_n = [x_n, x_n] = \{x_n\}$ הוא נקודון לכל n.
קיבלנו כי $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ בת מנייה, וזו סתירה. מש"ל.

ד. בבסיס טרינארי, $\frac{1}{4} = 0.020202\ldots_3$, וזאת כי
$0.020202\ldots_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = 2\frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1}{4}$. כל הספרות בייצוג זה הן אפס או שתיים ולכן $\frac{1}{4} \in C$. $\frac{1}{4}$ אינו קצה של אף קטע בקבוצות C_n כי אינו מהצורה $\frac{k}{3^n}$.

3.

א.

(i) אם $E \in \Sigma$ אזי E בת מנייה או E^c בת מנייה. זאת אומרת $(E^c)^c$ בת מנייה או E^c בת מנייה. ומכאן $E^c \in \Sigma$.

(ii) נניח שלכל n $E_n \in \Sigma$ ויש להוכיח $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$. נחלק לשני מקרים:

מקרה ראשון – כל ה- E_n ים בנות מנייה, **ואז** $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$ כי איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא קבוצה בת מנייה.

מקרה שני – קיימת $E_{n_0} \in \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאינה בת מנייה (ולכן בהכרח $E_{n_0}^c$ בת מנייה). ע"פ דה-מורגן $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c \subseteq E_{n_0}^c$ which is countable **ולכן** $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$ בת מנייה (כתת קבוצה של בת מנייה) **ולכן** $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

(iii) הקבוצה הריקה היא בת מנייה, **ולכן** $\varnothing \in \Sigma$.

ב.

(i) $|\varnothing| \le \aleph_0$ **ולכן** $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) נניח שלכל n $E_n \in \Sigma$, והה- E_n ים זרות הדדית. יש להוכיח $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ (מדובר באיחוד זר כמובן). גם כאן נחלק לשני מקרים:

מקרה ראשון – כל ה- E_n ים בנות מנייה, ואז גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ בת מנייה והשוויון שיש להוכיח הוא $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ שנכון כמובן.

מקרה שני – קיימת $E_{n_0} \in \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאינה בת מנייה, ואז גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ אינה בת מנייה. יש לנו ש- $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty$ (כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ אינה בת מנייה) ובנוסף $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ge \mu(E_{n_0}) = \infty$ ובסה"כ השוויון הוא $\infty = \infty$ שנכון גם כן.

.4

א. נסמן $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ נגדיר סדרת קבוצות חדשה ע"י $F_n := E_n \setminus E_{n+1}$. אזי $E_1 \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ וה- $\{F_n\}$ זרות הדדית. מכאן $\mu(E_1 \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n+1})$ **ומאחר** והקבוצות בעלות מידה סופית מתקיים $\mu(E_1) - \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) - \mu(E_{n+1})$, אגף ימין

הוא טור טלסקופי שסכומו $\mu(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$, ולכן $\mu(E_1)-\mu(E)=\mu(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$. חיסור $\mu(E_1)<\infty$ משני האגפים נותן את התוצאה.

ב. סדרת הקבוצות $E_n=(n,\infty)$ בממ"ח (R,L,m) מהווה דוגמא נגדית, שכן $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=m(\varnothing)=0$, ומנגד $\lim_{n\to\infty}m(E_n)=\lim_{n\to\infty}\infty=\infty$.