מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 10

קומפקטיות "הכללה גאונית של סופיות"

הגדרה מרחב טופולוגי (X,τ) הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח $X=\bigcup_{i\in I} O_i$ שלו יש תת כיסוי סופי (ז"א קיימים $O_{i_1},O_{i_2},\cdots,O_{i_n}$ כך ש $X=O_{i_1}\cup O_{i_2}\cup\cdots\cup O_{i_n}$).

סימון: $(X,\tau)\in \text{Comp}$.

הגדרה שקולה (קריטריון FIP תכונת החיתוך הסופי)

נניח $\{A_i : i\in I\}$ קבוצות סגורות ב (X,τ) כך ש $\bigcap_{i\in I} A_i=\varnothing$. אז קיימים $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_n}$ כך ש $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_n}=\varnothing$.

הערה: קומפקטיות חשובה מאוד, בין היתר, "במשפטי קיום".

תכונות ודוגמאות:

- כל מרחב סופי הוא קומפקטי.
- $Comp \ni (X,\tau_{cofinite})$

הסבר: קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט למספר סופי של נקודות.

- $X \ is \ finite \Leftrightarrow (X,\tau_{discr})\in \text{Comp}$

הסבר: $\{\{x\}: x\in X\}$ כיסוי **פתוח** של X ...

משפט: אם (X,d) מ"מ כך ש $(X,top(d))\in Comp$. אז (X,d) חסום.

הוכחה: ניקח $z\in X$, אז $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(z)$ כיסוי פתוח.

יש תת כיסוי סופי ואז $\exists n_0: X=B_{n_0}(z)$. לכן $diam\, X\le 2n_0$.

☺

תוצאה: $\mathbb{R}^n,\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}\notin Comp$, כל מרחב נורמי (לא מנוון).

<u>הגדרה:</u> תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(Y,\tau_Y)\in \mathrm{Comp}$.

משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית) התנאים הבאים שקולים:

א) Y תת קבוצה קומפקטית ב X.

ב) לכל אוסף $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב X שמכסה את Y

(ז"א $Y\subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$) קיים תת אוסף <u>סופי</u> $\{O_j\}_{j\in J}$, $J\subseteq I$ סופי שמכסה את Y

(ז"א $Y\subseteq \bigcup_{j\in J} O_j$).

<u>הסבר:</u> נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

- איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

הערה: לפי משפט Heine-Borel (נוכיח בהמשך):

תת מרחב X של $\mathbb{R}^n$ קומפקטי אם ורק אם X סגור וחסום ב $\mathbb{R}^n$.

<u>תרגיל</u>: תת קבוצה $Q\cap[0,1]$ סגורה וחסומה ב Q אבל לא קומפקטית.

זה אפשר להוכיח דרך הגדרה או דרך משפט Heine-Borel (לא סגור ב $\mathbb{R}$)

<u>תרגיל</u>: ת"ק $Y=[0,1]$ בקו סורגנפרי $(\mathbb{R},\tau_s)$ לא קומפקטית.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y. כיסוי $\alpha:=\bigcup_{n\geq 2}[0,\frac{n-1}{n})\cup\{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y

ללא תת כיסוי סופי. (שימו לב: $\{1\}=[1,2)\cap[0,1]$ פתוחה בתת מרחב $[0,1]$ של $(\mathbb{R},\tau_s)$)

<u>הערה:</u> קומפקטיות לא תורשתית $\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp}\subset\underbrace{[0,1]}_{\in Comp}$

הסבר: ($\alpha:=\{(\frac{1}{n+1},1):n\in\mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" (ללא תת כיסוי סופי) של $(0,1)$)

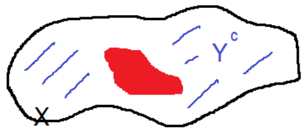
הסבר שקול (דרך FIP) $\alpha:=\{(0,\frac{1}{n+1}]:n\in\mathbb{N}\}$ משפחת קבוצות סגורות עם FIP אבל

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\tfrac{1}{n+1}]=\varnothing$$

יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות <u>סגורות</u>.

משפט: נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y \in Comp$.

הוכחה:



נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב X כך ש $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$

הרעיון: להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^* = \alpha \cup \{Y^c\}$. הוא בעצם כיסוי פתוח של X.

$X \in Comp \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי $\gamma \subseteq \alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ γ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y. לכן נקבל תת אוסף סופי ל α (ולא ל α^*) שמכסה את Y. אז $Y \in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

$\blacksquare$

משפט: תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

הוכחה: $X \in Comp$. f רציפה ועל $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Comp$.

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של Y. צ"ל קיים כיסוי סופי.

$Y = \bigcup_{i \in I} O_i \Leftarrow$

$X = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$.

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של X ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש – f רציפה).

$X \in Comp \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי ל - $\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש –

$$X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)$$

אז מכאן $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j \in J} O_j$

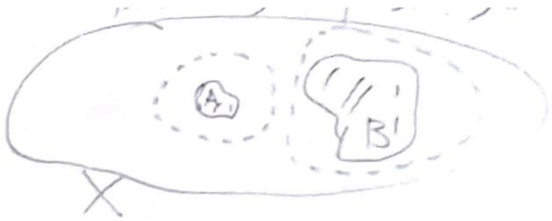
(תמיד $ff^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם f על אז $ff^{-1}(A) = A$)

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j \in J}$ ל α.

$\blacksquare$

תרגיל: נניח $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיח $f([a,b]) = [c,d]$.

<u>משפט (ההפרדה):</u> נניח $X \in T_2$, A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



<u>הוכחה:</u>

<u>מקרה א'</u> $A = \{a\}$

<u>הערה:</u> קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B\ \exists U_b \in N(a)\ \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b \in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X.

בגלל קריטריון (3) ⇐ קיים תת כיסוי <u>סופי</u>

$$\exists\ \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: \qquad B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \underbrace{=:}_{\text{נסמן}} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B. נגדיר בהתאמה

$$N(a) \ni U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

מ (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a. כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

<u>מקרה ב' (כללי)</u>

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A\ \exists U_a \in N(a)\ \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a\in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X.

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר $N(B) \ni V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supseteq B$ V פתוח בגלל - (t_2).

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

■

<u>משפט (הסגירות):</u> נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב X.

<u>הוכחה:</u>

ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.

■

<u>משפט (הנורמליות):</u> $X \in T_4 \Leftarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$

ניסוח שקול: $Comp \cap T_2 \subset T_4$

הוכחה: A, B תת קבוצות סגורות וזרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■

משפט: (תנאי מספיק לסגירות פונקציות)

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה **סגורה**.

הוכחה:

צ"ל $f(A)$ סגורה ב Y לכל A סגורה ב X.

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in Comp$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in Comp$.

לפי משפט תמונה רציפה שומרת על $Comp$. נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם)

$$T_2 \ni Y \supseteq f(A) \in Comp$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).

■

משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה <u>וחח"ע</u>. אזי f <u>שיכון טופולוגי</u>

(ז"א $f: X \to f(X)$ הומיאומורפיזם).

הוכחה: מ"ל את המשפט בהנחה ש f <u>על</u>. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

3) רציפות של ההופכי $X \xleftarrow{f^{-1}} Y = f(X)$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

הערה: א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f <u>על</u> אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג. $f(X)$ סגור.

<u>תוצאה</u>: נניח $(X,\tau)\in\mathrm{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 (*Hausdorff*) כך ש $\sigma\subseteq\tau$. אז $\sigma=\tau$.

<u>משפט (הכללת משפט ויירשטרס):</u> נניח $X\in Comp$, $f\colon X\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ומקבלת Max, Min מוחלטים.

<u>הוכחה:</u>

$Comp$ נשמרת ע"י תמונה רציפה. לכן $\mathbb{R}\supset f(X)\in Comp$

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב - $\mathbb{R}$, אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R}\ni B\coloneqq\sup\{f(x)|x\in X\}\in\overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R}\ni A\coloneqq\inf\{f(x)|x\in X\}\in\overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X)=\overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B=Max\ f$$

$$A=Min\ f$$

■

<u>תרגילים:</u>

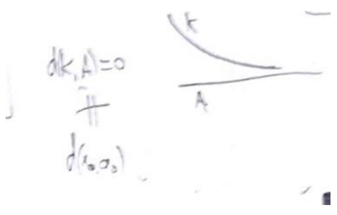
1) נניח (X,d) מ"מ, $A,K\subseteq X$ לא ריקות, $K\in Comp$. אזי:

א) קיימת נקודה $x_0\in K$ כך ש $\boxed{d(K,A)=d(x_0,A)}$

<u>רמז:</u> פונקציית המרחק...

ב) אם גם $A\in Comp$, אז $\exists a_0\in A,\exists x_0\in K\colon\boxed{d(K,A)=d(x_0,a_0)}$

<u>דוגמה נגדית</u> (אפילו לקבוצות סגורות) ב $\mathbb{R}^2$:



ב $\mathbb{R}$: $\underbrace{B=\left\{n+\frac{1}{2n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\},A=\mathbb{N}}_{\text{סגורות}}$

$0=d(A,B)\neq d(a_0,b_0)$ (לכן inf לא מתקבל!)

חסימות כליל

הגדרה: נניח נתון $\varepsilon>0$. תת קבוצה A במרחב מטרי (X,d) נקראת **ε-צפופה** אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(a,x)<\varepsilon$.

(אומרים ש: a מקרב את x עד כדי ε)

הגדרה שקולה: $\bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)=\mathrm{X}$

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **חסום כליל** (totally bounded) אם :

לכל $\varepsilon>0$ נתון קיימת תת קבוצה **סופית** A_ε שהיא ε-צפופה ב (X,d).

הגדרה: תת קבוצה Y במ"מ (X,d) נקראת חסומה כליל אם מרחב (Y,d_Y) ח"כ.

דוגמה: $\mathrm{X}=\mathbb{R}\supset[0,1]=\mathrm{Y}$, אז ת"ק $\mathrm{A}_{\frac{1}{n}}=\{\frac{i}{n}:i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$ היא $\frac{1}{n}$-צפופה ב Y

תרגיל: ב $\mathrm{Y}=[0,1]\times[0,1]$ למצוא ת"ק סופית שהיא $\frac{1}{100}$-צפופה.

משפט: אם מרחב מטרי (X,d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

הוכחה: לכל $\varepsilon>0$ נתון לכיסוי פתוח $\bigcup_{a\in X} B_\varepsilon(a)=\mathrm{X}$ יש תת כיסוי סופי.

דוגמה: (X,d_Δ) תמיד חסום אבל לא ח"כ עבור X אינסופית.

תכונות:

- מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).
- (תושתיות) אם (X,d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
- איחוד **סופי** של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
- אם תת מרחב מטרי (Y,d_Y) של מ"מ (X,d) ח"כ אז גם הסגור $cl(Y)$ ח"כ.
- אם $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$ ח"כ אז גם מכפלה $(X_1\times X_2,\rho)$ עם "מטריקה רוקלידית" הוא גם חסום כליל.

דוגמה: $Y=\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ חסום אבל לא ח"כ (ולא קומפקטי) במרחב הילברט $X=l_2$.

תרגיל: $B_r[a]$ לא קומפקטי ב l_2.

<u>תרגיל:</u> תנו דוגמאות של מ"מ ח"כ שהוא לא קומפקטי.

<u>Spoiler</u>: מ"מ הוא קומפקטי אם"ם הוא ח"כ ושלם (משפט שנוכיח בהמשך).

<u>תזכורת</u>: השלמה $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}, d_p})$ כאשר:

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{p - \text{מספרים אדיים}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \, , b_k \in \underbrace{\{0,1, \dots, p-1\}}_{p \text{ שאריות מודולו}} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא קומפקטי (<u>Spoiler</u>). בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שמ"מ $(\mathbb{Z}, d_p)$ חסום כליל ולא קומפקטי

<u>הסבר מקוצר:</u> לא קומפקטי כי המרחב לא שלם. למשל הסדרה $a_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n$ היא ס"ק אבל לא מתכנסת (תרגול).

רמז לגבי ח"כ: תת קבוצה $\{0,1,\cdots,\mathrm{p}^k-1\}$ היא ε-צפופה עבור $\varepsilon = ?$

ראו תמונות במקרה של $p = 3$

ת"ק $\{0\}$ ε-צפופה לכל $1 < \varepsilon$

ת"ק $\mathrm{A} := \{0,1,2\}$ ε-צפופה לכל $\frac{1}{3} < \varepsilon$

הסבר: שאריות מודולו 3 הן בדיוק $\mathrm{A} = \{0,1,2\}$.

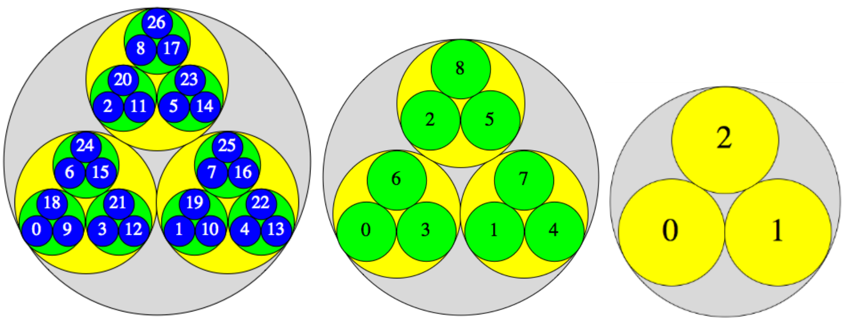
לכן לכל $x \in \mathbb{Z}$ קיים $a \in A$ כך ש $3 \,|\, (x-a)$. מכאן $d_3(x,a) \le \frac{1}{3}$.

. . .

ת"ק $\mathrm{A} := \{0,1,2,\cdots,3^n-1\}$ ε-צפופה לכל $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ (ראו תמונות למטה)

<u>שאלה</u>: א. כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}, d_3})$ לפי התמונות הבאות ?

ב. בתרגול הראשון למדתם על האולטרה מטריקה של מרחק בין מילים, מה הקשר?



<u>משפט:</u> אם (X,d) מ"מ קומפקטי (ז"א $(X,top(d)) \in Comp$) אזי

א. (X,d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in Sep$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

<u>הוכחה</u>: א **תזכורת:** לכל ε-כיסוי $\{B(x,\varepsilon): x \in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε-צפוף ב (X,d) אז $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. **<u>טענה כללית</u>**: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי הוא בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A) = X$) בת מניה A ב X.

בגלל המטריזביליות $\mathrm{scl(A)} = \mathrm{cl(A)}$. לכן נקבל $\mathrm{scl(A)} = X$.

לכל איבר $x \in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $a_n \in A, x = \lim a_n$. נגדיר פונקציה

$$\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{P(A)} \quad \sigma(x) = \{a_n \mid \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{A}$$

זאת פונקציה **<u>חח"ע</u>** (כי במרחב מטרי הטווח של סדרה מתכנסת קובעת חד משמעית את הגבול. בין היתר, אין תלות בתמורות של איברים בסדרה)

לכן $card(X) = \mathrm{card}(\sigma(\mathrm{X})) \le card\ P(\mathrm{A}) \le 2^{\aleph_0} = card\,\mathbb{R}$.

סימון: $card(A)$ = העוצמה של A (מהמילה: cardinality)

■