בס"ד

ט"ז בשבט התשע"ו (26.1.16 למנ')

אלגברה לינארית להנדסה בר -אילן
מועד א' התשע"ו

ד"ר מיטל אליהו רובינסון.
מתרגלים : אחיה בראון, תמר נחשוני, ביאנה פרידמן ויונתן רוזן

זמן הבחינה : 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לחלק הראשון ותכננו את חלוקת הזמן!
מספיקות 40 דק לכל אחת מהשאלות האחרות!
מותר להשתמש במחשבונים מדעיים פשוטים בלבד!

בסוף הבחינה יש דפי טיוטה לשימושכם.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
הוכחות :שאלות 1-2	
3	
4	
5	
סה"כ	

בס"ד

<u>חלק א'– הוכחה (20 נק' לשאלה)</u>

<u>ענו על אחת בלבד מהשאלות הבאות:</u>

1. נסחו והוכיחו את **<u>שני</u>** המשפטונים הבאים:
   א. משפט השלישי חינם.
   ב. א"ש המשולש לנורמה מושרית.

2. נסחו והוכיחו את משפט הדרגה (מימדים) של העתקה לינארית.

<u>המשך תשובה לחלק א'</u>

<u>חלק ב'- שאלות פתוחות – יש לענות על כל השאלות !</u>

3. <u>(20 נק') אין קשר בין הסעיפים!</u>

א. (8 נק') תהי $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

מצאו בסיס ומימד עבור:

i) $R(A)$

ii) $C(A)+N(A)$

iii) $C(A)\cap N(A)$

ב. (12 נק')מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ נקראת נילפוטנטית מסדר k אם קיים $0<k\in\mathbb{N}$ כך ש $A^k=0$ אבל $A^{k-1}\neq 0$. הוכח או הפרך:

i. כל מטריצה שאינה נילפוטנטית היא הפיכה.

ii. כל נילפוטנטית היא לא הפיכה.

iii. מכפלה של נילפוטנטיות מסדר k היא נילפוטנטית מסדר k.

<u>המשך התשובה לשאלה 3</u>

המשך התשובה לשאלה 3

4. (34 נק')נתונה המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

א. מצאו פ"א,ע"ע וו"ע שלה (6 נק').

ב. מצאו מטריצה $P\in\mathbb{R}^{3\times3}$ אורתוגונאלית ומטריצה $D\in\mathbb{R}^{3\times3}$ אלכסונית כך שמתקיים $P^TAP=D$ והסבירו מדוע קיים ל A לכסון כזה, ללא שימוש בחישובים שחישבתם בסעיף א' ! (6 נק')

ג. נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י $T(v)=Av$. מצאו בסיס לגרעין ולתמונה של T וכתבו האם היא חח"ע ? על? (6 נק')

ד. אין קשר לסעיפים קודמים !!

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי :

i. לכל $u\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $(Au)^Tu\ge 0$ אמ"ם כל הע"ע של A חיוביים. (10 נק')

ii. לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $(Au)^Tv=(Av)^Tu$ (6 נק')

<u>המשך התשובה לשאלה 4</u>

<u>המשך התשובה לשאלה 4</u>

בס"ד

5. <u>(26 נק') אין קשר בין הסעיפים:</u>

א. מה צריך להתקיים עבור a,b,c ע"מ שהמטריצה הנ"ל תהיה הפיכה :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc+a^2 & ac+b^2 & ab+c^2 \end{pmatrix}$$ (10 נק')

ב. האם קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ כך ש : למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ קיים פתרון

ומתקיים ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A^T)$. אם כן – תנו דוגמה למטריצה המקיימת זאת.

אם לא – הוכיחו! (5 נק')

ג. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש לכל $v \neq 0$ מתקיים $v^T A v > 0$. הוכיחו A הפיכה.
(5 נק')

ד. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ בעלת פולינום אופייני :

$$P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

הוכיחו כי קבוצת המטריצות : $\left\{A^n, A^{n-1}, ..., A, I\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ היא תלויה לינארית. (6 נק')

<u>המשך תשובה לשאלה 5</u>

<u>המשך תשובה לשאלה 5</u>

טיוטה

טיוטה

טיוטה

טיוטה