88201 - תרגיל 4

1. נתונה עקומה $\gamma:[0,2\pi]\to R^2$ המוגדרת ע"י הפרמטרזציה $\gamma(t)=(2\cos t,3\sin t)$
   א. שרטט עקומה זו במערכת צירים
   ב. מצא משוואה ריבועית $F(x,y)=0$ שמגדירה עקומה זו.
   ג. חשב את עקמומיות העקומה. הבע את העקמומיות כפונקציה של x. (היעזר בנוסחת Bateman)
   ד. מצא את הנקודות על העקומה בהן עקמומיות מקסימאלית ועקמומיות מינימאלית. מהי עקמומיות זו? מהו רדיוס העקמומיות בנקודות אלו?
2. תהי $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{(2+x^2)^3}$, מצאו פרמטריזציית אורך קשת לגרף של פונקצייה זו.

הפרמ' הראשונה שניקח היא $\gamma(t)=\left(t,\frac{1}{3}\sqrt{(2+t^2)^3}\right)$. הנגזרת שלה היא $\gamma'(t)=\left(1,\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2+t^2)^2\cdot 2t}{2\sqrt{(2+t^2)^3}}\right)=\left(1,t\sqrt{(2+t^2)}\right)$. ולכן . המהירות שלה היא $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+t^2(2+t^2)}=\sqrt{t^4+2t^2+1}=t^2+1$.
מ- $t=0$ עד $t=x$ היא עוברת מרחק של $s(x)=\int_0^x\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^x(t^2+1)dt=\frac{x^3}{3}+x$
אנחנו מחפשים פונקציה הפוכה $x(s)$, היא קיימת כי $s(x)=\frac{x^3}{3}+x$ מונוטונית עולה ולכן חח"ע.
אנחנו יודעים ש $s(0)=0$ ולכן הפונקציה ההפוכה תקיים $x(0)=x(s(0))=0$. בנוסף אם $s'(x)=x^2+1$ אז לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה $x'(s(x))=\frac{1}{s'(x)}$...

3. הוכיחו כי לעקומה $\gamma(t)$ יש מהירות קבועה אם ורק אם γ' מאונך ל γ''. רמז: גזרו את התבוננו בנגזרת לפי t של מכפלה פנימית מסויימת.

לעקומה יש מהירות קבועה אם ורק אם $\|\gamma'(t)\|$ קבוע. וזה נכון אם ורק אם $\|\gamma'(t)\|^2=\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle$ קבוע, וזה נכון אם ורק אם $\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle'=0$. אבל $\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle'=2\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle$ ולכן לעקומה יש מהירות קבועה אם ורק אם $\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=0$ וזה בדיוק אומר ש- $\gamma''(t)$ מאונך ל- $\gamma'(t)$.

4. חשב את עקמומיות העקומה γ המוגדרת ע"י המשוואה (היעזר בנוסחת Bateman)
   א. $x^2+y^2+4y+1=2x$
   ב. $ax^2+by^2=1$

עוד לא למדנו על עקמומיות עם סימן חיובי/שלילי, אז תתעלמו מחלק זה, העקמומיות עבורנו היא הערך המוחלט המופיע בתשובה.

א. $ax^2 + by^2 = 1$

נסמן $F(x,y) = ax^2 + by^2 - 1$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y) = 0$. נחשב:

ולכן: $F_x' = 2ax, F_y' = 2by, F_{xx}'' = 2a, F_{xy}'' = 0, F_{yy}'' = 2b$

$$|k(x,y)| = \left|\frac{2a\cdot(2by)^2 + 2b\cdot(2ax)^2 - 2\cdot 0\cdot(2ax)\cdot(2by)}{\sqrt{(4a^2x^2 + 4b^2y^2)^3}}\right|$$

$$= \left|\frac{8ab^2y^2 + 8ba^2x^2}{8\sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2)^3}}\right| = \left|\frac{ab^2y^2 + ba^2x^2}{\sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2)^3}}\right|$$

סימן העקמומיות תלוי בכיוון שבו אנחנו מתקדמים על העקומה.

ב. $x^2 + y^2 + 4y + 1 = 2x$

נסמן $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y) = 0$. נחשב:

ולכן: $F_x' = 2x - 2, F_y' = 2y + 4, F_{xx}'' = 2, F_{xy}'' = 0, F_{yy}'' = 2$

$$|k(x,y)|$$

$$= \left|\frac{2\cdot(2y+4)^2 + 2\cdot(2x-2)^2 - 2\cdot 0\cdot(2x-2)\cdot(2y+4)}{\sqrt{((2x-2)^2 + (2y+4)^2)^3}}\right|$$

$$= \left|\frac{8x^2 - 16x + 8 + 8y^2 + 32y + 32}{\sqrt{(4x^2 - 8x + 4y^2 + 16y + 20)^3}}\right|$$

$$= \left|\frac{8(x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5)}{8\sqrt{(x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5)^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5}}\right|$$

שוב, הסימן תלוי בכיוון ההתקדמות.

5. חשבו את העקמומיות של העקומות באות:

א. $\gamma(t) = (t, \cosh t)$.

ב. $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$.

5. חשב את העקמומיות של העקומות הבאות:

א. $\gamma(t) = (t, \cosh t)$

$\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$, $\gamma''(t) = (0, \cosh t)$ ו-

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$ כי $\cosh t > 0$ תמיד.

ולכן $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \cosh t$

$k(t) = \dfrac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \dfrac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \dfrac{1}{\cosh^2 t} = \dfrac{4}{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}$.

ב. $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$,

$\gamma''(t) = (6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t, 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t)$ ו-

$$\|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3\sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t}$$
$$= 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t|$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = 9\det\begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t & 2\cos t \sin^2 t - \cos^3 t \\ \sin^2 t \cos t & 2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t \end{pmatrix}$$
$$= 9(\cos^2 t \sin^4 t - 2\cos^4 t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)$$
$$= -9(\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)$$
$$= -9(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t = -9\cos^2 t \sin^2 t$$

ולכן $k(t) = \dfrac{-9\cos^2 t \sin^2 t}{27|\cos t \sin t|^3} = \dfrac{1}{3|\cos t \sin t|}$.

6. חקרו את העקומה $\gamma(t) = \left(\cos t, \dfrac{1}{2}\sin 2t\right), \quad 0 \le t \le 2\pi$.

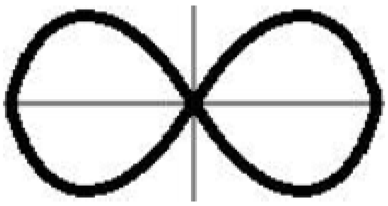
א. ציירו אותה.

ב. חשבו את המשיק והנורמל בכל נקודה.

ג. האם העקומה במהירות יחידה?

7. חקור את העקומה $\varphi(t)=\left(\cos t,\frac{1}{2}\sin 2t\right)$, $0\le t\le 2\pi$.

א. צייר אותה.



ב. חשב T,N ועקמומיות.

כרגיל $\varphi'(t)=(-\sin t,\cos 2t)$, $\|\varphi'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 2t}$,

ו- $T(t)=\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 2t}}(-\sin t,\cos 2t)$

$N(t)=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 2t}}(-\cos 2t,-\sin t)$

בקשר לעקמומיות $\varphi''(t)=(-\cos t,-2\sin 2t)$,

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos 2t & -2\sin 2t \end{pmatrix}=(\cos t-\cos 3t)+\frac{\cos t+\cos 3t}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos 3t$$

ולכן $k(t)=\frac{3\cos t-\cos 3t}{2\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 2t}^3}$.

ג. מה עם מהירות יחידה?

$\|\varphi'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 2t}$ לא סימפתי, לא כדאי לנסות לשים אותו באינטגרל.

לגבי ג' – אפשר לראות שהפונקציה לא קבועה ולכן העקומה לא במהירות יחידה.

7. נתונה עקומה γ בפרמטר טבעי s, תארו כיצד משפיעות העתקות הבאות על העקמומיות של γ (כלומר מצאו את העקמומיות של העקומה המתקבלת לאחר ביצוע הפעולה).

א. החלפת האוריינטציה במישור: $T(x_1,x_2)=(x_1,-x_2)$, העקומה המתקבלת היא $\beta(s)=T\circ\gamma(s)$.

ב. היפוך כיוון התנועה של העקומה: $\beta(s)=\gamma(-s)$.

ג. הזזת הפרמטר הטבעי: $\beta(s)=\gamma(s+s_0)$.

העקמומיות נשמרת זהה בכל הסעיפים הנ"ל. כשנדבר על עקמומיות עם סימן זה יהיה מעניין יותר

8. נגדיר את ההטלה הסטריאוגרפית של הספירה $A=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=r^2\}$ ב $\mathbb{R}^3$ על המישור. זו פונקציה f המעתיקה כל נקודה ב A פרט לקוטב הצפוני $N=(0,0,r)$ אל המישור $z=0$ בצורה הבאה: תהי $p\in A\backslash\{N\}$, $f(p)$ היא נקודת החיתוך של הישר העובר דרך N ו p עם המישור $z=0$.

א. מצאו נוסחאות מפורשות ל f ולf^{-1}.

ב. כעת, שימו לב ש f^{-1} היא פרמטריזציה של הספירה, לבד מהקוטב הצפוני. מצאו בצורה מפורשת את התבנית היסודית הראשונה של פרמטריזציה זו.

נגדיר את ההטלה הסטריאוגרפית של הספירה:

$$\mathbb{S}^2=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2\}$$

פרט לקוטב הצפוני $\mathbf{N}=(0,0,R)$, אל המישור $\{z=0\}$, באופן הבא: נקודה $\mathbf{p}\in\mathbb{S}^2\backslash\{\mathbf{N}\}$ עוברת אל נקודת החיתוך של הישר $[\mathbf{N},\mathbf{p}]$ עם המישור $\{z=0\}$.

א. מצאו נוסחאות מפורשות להטלה $\mathbf{f}$ ולפונקציה ההופכית להטלה $\mathbf{f}^{-1}$ והוכיחו שהטלה זו הינה דיפאומורפיזם.

התעלמו מהחלק על דיפאומורפיזם.

תהי $\mathbf{p}=(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\backslash\{\mathbf{N}\}$. הישר $[\mathbf{N},\mathbf{p}]$ הוא:

$$[\mathbf{N},\mathbf{p}]=\{(1-t)\,\mathbf{N}+t\mathbf{p}:t\geq 0\}=\left\{\begin{pmatrix}tx\\ty\\R(1-t)+tz\end{pmatrix}:t\geq 0\right\}$$

נקודת החיתוך שלו עם המישור $\{z=0\}$ מקיימת:

$$R(1-t)+tz=0\quad\Longrightarrow\quad t=\frac{R}{R-z}$$

מכאן:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p})=\mathbf{f}(x,y,z)=\frac{R}{R-z}(x,y,0)\cong\frac{R}{R-z}(x,y)$$

כאשר הסימן $\cong$ מייצג איזומטריה בין $\{z=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$ לבין $\mathbb{R}^2$.

בכיוון ההפוך, תהי $\mathbf{q}=(u,v)\sim(u,v,0)\in\{z=0\}$. נתבונן בישר:

$$[\mathbf{N},\mathbf{q}]=\{(1-t)\,\mathbf{N}+t\mathbf{q}:t\geq 0\}=\left\{\begin{pmatrix}tu\\tv\\R(1-t)\end{pmatrix}:t\geq 0\right\}$$

נקודת החיתוך שלו עם הספירה $\mathbb{S}^2$ מקיימת:

$$\begin{aligned}&(tu)^2+(tv)^2+(R(1-t))^2=R^2\\ \Rightarrow&t^2u^2+t^2v^2+R^2(1-t)^2=R^2\\ \Rightarrow&t^2u^2+t^2v^2+R^2-2tR^2+t^2R^2=R^2\\ \Rightarrow&tu^2+tv^2-2R^2+tR^2=0\\ \Rightarrow&t=\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}\end{aligned}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q})=\mathbf{f}^{-1}(u,v)&=\left(\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}u,\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}v,R\left(1-\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}\right)\right)\\&=\left(\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}u,\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}v,R\frac{u^2+v^2-R^2}{u^2+v^2+R^2}\right)\\&=\frac{R}{u^2+v^2+R^2}\left(2Ru,2Rv,u^2+v^2-R^2\right)\end{aligned}$$