

תרגיל בית 2 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. הוכיחו כי לפולינום $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 6)$ אין שורשים ב- \mathbb{Q} , אבל יש לו שורשים ב- \mathbb{F}_p לכל p ראשוני.

שאלה 2. יהיו $f(x) = x^2 - 3x + 3, g(x) = x^3 + 2x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$. תזכורת: אלגוריתם אוקלידס המורחב עובד בתחומים אוקלידיים כמו $F[x]$.

א. מצאו את $\gcd(f(x), g(x))$.

ב. מצאו את ההופכי של $g(x)$ בשדה $\mathbb{Q}[x]/\langle f(x) \rangle$.

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות. נתבונן בחוג הפולינומים $K[x]$ ובשדה הפונקציות הרציונליות $F(x)$, ונחשוב על שניהם כתת-קבוצות של השדה $K(x)$ באופן הברור. הוכיחו $F(x) \cap K[x] = F[x]$.

שאלה 4. תהי K/F הרחבת שדות, ויהי $a \in K$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם a איבר אלגברי מעל K אז הוא אלגברי מעל F .

ב. אם a איבר אלגברי מעל F אז הוא אלגברי מעל K .

ג. אם a איבר אלגברי מעל F אז גם $\alpha \cdot a$ הוא אלגברי לכל $\alpha \in F$.

שאלה 5. תהי K/F הרחבה סופית (כלומר $[K : F] < \infty$). הוכיחו כי כל איבר של K הוא אלגברי מעל F . רמז: חשבו על הקבוצה $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. רשות: להרחבה כמו בשאלה קוראים הרחבה אלגברית. האם כל הרחבה אלגברית היא סופית?

שאלה 6. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

שאלה 7. יהי F שדה, ותהי $G \leq F^*$ תת-חבורה סופית של החבורה הכפלית של השדה. הוכיחו כי G ציקלית. הדרכה: העזרו בתורת המבנה של חבורות אבליות סופיות ובחישוב $\exp(G)$.

בהצלחה!