

תרגיל בית 7 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהינה $K_1/F, K_2/F$ שתי הרחבות. נניח שיש איזומורפיזם $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ המקיים $\varphi|_F = \text{id}_F$. הוכיחו כי

$$\text{Aut}_F(K_1) \cong \text{Aut}_F(K_2)$$

שאלה 2. תהי K/\mathbb{F}_p הרחבת שדות סופית. הוכיחו כי $\sigma(x) = x^p$ הוא איבר של $\text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(K)$.

שאלה 3. חשבו את חבורות האוטומורפיזמים של ההרחבות הבאות:

א. K/\mathbb{F} כאשר $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ו- $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

ב. E/\mathbb{Q} כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^5 - 1$.

ג. E/F כאשר $[E : F] = 2$ עבור F ממאפיין שונה מ-2. רמז: העזרו בשאלה מתרגיל 5 והראו $E = F(\sqrt{\alpha})$ עבור $\alpha \in F$.

ד. E/\mathbb{Q} כאשר E הוא שדה פיצול של פולינום אי פריק ממעלה 3 שיש לו שורש מרוכב לא ממשי.

שאלה 4. יהי $f \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק, ויהי F/\mathbb{Q} שדה הפיצול שלו ב- \mathbb{C} . הוכיחו שאם $[F : \mathbb{Q}]$ אי זוגי, אז כל שורשי $f(x)$ הם ממשיים. רמז: הצמדה מרוכבת היא אוטומורפיזם.

בהצלחה!