בנימין לוין וניר שורץ

מופשטת 1, קיץ 2013

תרגול 7

הגדרה

תהי חבורה G. המרכז (center) של G הוא $Z(G) = \{g \in G | \forall x \in G: gx = xg\}$

כלומר, המרכז מורכב מאיברי G שמתחלפים עם כל אברי G.

מתקיים $G \triangleleft Z(G)$ וכן Z(G) אבלית

G אבלית $\Leftrightarrow G = Z(G)$.

שימו לב: המרכז תמיד לא ריק, שכן $e \in Z(G)$.

חבורת המנה

תהי G חבורה. $G \triangleleft H$. ניתן להגדיר מבנה חבורי על קבוצת המנה:

נסתכל באוסף הקוסטים השמאליים $G/_H = \{gH \mid g \in G\}$ שמוגדר כקבוצה לכל $H \leq G$ (אך מוגדר כחבורה אמ"ם $G \triangleleft H$). הפעולה שמגדירים על $G/_H$ היא $aH \cdot bH = ab \cdot H$. איבר היחידה של $G/_H$ הוא: $e_G H = H$.

דוגמאות

א) תהא $G = (\mathbb{R}^2, +)$, נתבונן בתח"ג $H = R \times \{0\}$

$$\mathbb{R}^2/_H = \{(a,b) + H: (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \cong \{\mathbb{R} \times \{b\}\}_{b \in \mathbb{R}}$$

זהו אוסף כל הישרים המקבילים לציר הX.

הערה:

תהא G חבורה סופית, $G \triangleleft H$, אזי האוסף $G/_H$ הוא כל המחלקות השמאליות ולכן מתקיים $|G/_H| = [G:H] = \frac{|G|}{|H|}$

תרגיל

תהי G חבורה וכן $G \triangleleft H$. נניח $[G:H] = n$. הראו כי לכל $a \in G$ מתקיים $a^n \in H$.

הוכחה

$G/_H$ חבורת מנה וכן $|G/_H| = n$. יהי $a \in G$ אזי $aH \in G/_H$. הוכחנו ש $\forall a \in G, a^{|G|} = e$ וכן לפי לגראנז׳ $(aH)^n = a^nH = H$ ולכן $H = a^nH \Rightarrow a^n \in H$.

תרגיל

תהא $H \leq G$ ת״ח מאינדקס 2 אזי $G/_H$ היא חבורה אבלית.

הוכחה

ראינו כי אם $[G:H] = 2$, אזי $H \lhd G$ ולכן אנחנו יודעים כי $G/_H$ חבורה וגם $|G/_H| = 2$ ולכן $G/_H$ חבורה ציקלית ולכן אבלית. למעשה $G/_H \cong \mathbb{Z}_2$ כיוון שיש רק חבורה אחת מסדר 2 עד כדי איזומורפיזם.

תזכורת: $\Omega_\infty = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in N: z^n = 1\}$

תרגיל

תהי $\Omega_\infty = \{z \in \mathbb{C}^* | \exists n \in \mathbb{N}: z^n = 1\}$. הראו כי אם $a \in \mathbb{C}^*/_{\Omega_\infty}$ אינו איבר היחידה, אז הוא מסדר אינסופי

הוכחה

נניח בשלילה שקיים $a \in \mathbb{C}^*/_{\Omega_\infty}$ שאינו איבר היחידה והוא מסדר סופי. כלומר

1) a איננו איבר היחידה: $(a \in \mathbb{C}^*/_{\Omega_\infty} \rightarrow a = z\Omega_\infty)$ בפרט $a \notin \Omega_\infty \Rightarrow z \neq \Omega_\infty$.
2) a מסדר סופי ולכן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש: $a^k = \Omega_\infty$. בפרט:

$$(z\Omega_\infty)^k = z^k\Omega_\infty = \Omega_\infty \Rightarrow z^k \in \Omega_\infty \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: (z^k)^m = z^{kn} = 1$$

אבל זה בפרט גורר ש $z \in \Omega_\infty$ בסתירה להנחה.

מ.ש.ל ■

משפט האיזומורפיזם הראשון

תהיינה G, H חבורות, ויהי $\varphi: G \to H$ אפימורפיזם, אז $G/_{\ker(\varphi)} \cong H$.

(גרסה נוספת) אם φ הוא הומו׳ אז $G/_{\ker(\varphi)} \cong Im(\varphi)$.

תרגיל

נניח וקיים הומומורפיזם $f: \mathbb{Z}_{14} \to D_{10}$. מה יכול להיות הסדר של $\ker(f)$?

פתרון

נזכר כי $\mathbb{Z}_{14} \rhd \ker(f)$ ולכן יתקיים $|\mathbb{Z}_{14}| \mid |\ker(f)|$ ז״א $|\ker(f)| \in \{1,2,7,14\}$.

נבדוק את האפשרויות:

- $|\ker(f)| = 1 \Leftarrow$ f חח״ע
  $\mathbb{Z}_{14}/_{\ker f} \cong Im(f) \leq D_{10}$, ולכן $|D_{10}| = 20 \mid |Im(f)| = |\mathbb{Z}_{14}/_{kerf}|$ אבל $20 \nmid 14$ בסתירה.
  אפשרות זו לא אפשרית.
- $|\ker(f)| = 2$ ואז $|\mathbb{Z}_{14}/_{\ker(f)}| = \frac{|\mathbb{Z}_{14}|}{|\ker(f)|} = \frac{14}{2} = 7$ אבל $20 \nmid 7$.
- $|ker(f)| = 7$ ואז $|\mathbb{Z}_{14}/_{\ker(f)}| = 2 \mid 20$. נראה כי אכן קיימת תת חבורה כזו, לדוגמא $H =$
  $\{e,\tau\} \leq D_{10}$

צריך לבנות אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{14} \to H$ (נניח $k \mapsto \tau^k$). הגרעין יהיה תת חבורה מסדר 7, ולכן $\ker(f) \cong \mathbb{Z}_7$

- $|\ker(f)| = 14$ במקרה זה מקבלים $\ker(f) \cong \mathbb{Z}_{14}$ כלומר מקבלים את ההומומורפיזם הטריוויאלי.($k \mapsto id$).

מ.ש.ל.

טענה

תהי G חבורה, נניח כי חבורת המנה $G/_{Z(G)}$ היא צקלית, אז היא חבורת המנה הטריוויאלית (נקבל $|G/_{Z(G)}| = 1$).

בניסוח שונה: אם G איננה אבלית אז חבורת המנה $G/_{z(G)}$ איננה ציקלית לא-טריוויאלית.

הוכחה

נניח ש- $G/Z(G)$ ציקלית, ונוכיח ש- G אבלית (כלומר, $G = Z(G)$).

$G/_{Z(G)}$ ציקלית ולכן קיים $a \in G$ כך ש $G/_{Z(G)} = \langle aZ(G)\rangle$ ושימו לב כי כיוון ו$Z(G) \leq G$ וכן $xZ(G)$ הם קוסטים וכל חבורה היא איחוד זר של הקוסטים שלה מתקיים

$$G = \bigsqcup_{x\in G} xZ(G)$$

כ״כ $xZ(G) \in G/_{Z(G)} \Leftarrow xZ(G) = (aZ(G))^i = a^iZ(G)$ $\exists i:$ ולכן

$$G = \bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} a^i Z(G)$$

כעת נראה שG אבלית: יהיו $b, c \in G$ וצ"ל $bc = cb$. כיוון ו$b, c \in G$

$$\exists i, j: b \in a^i Z(G), c \in a^j Z(G) \Rightarrow \exists k, t \in Z(G): b = a^i k, c = a^j t$$

ונובע:

$$bc = a^i k a^j t = a^i k t a^j = a^i t k a^j = cb$$

ולכן G אבלית כדרוש. ■

משפט האיזומורפיזם השני

תהי G חבורה, $H \le G, N \lhd G$, אזי:

א) $H \cap N \lhd H$

ב) $H/_{H\cap N} \cong HN/_N$

תרגיל

תהי G חבורה סופית, ותהא $H \lhd G$ תח"נ כך ש $\gcd(|H|, [G:H]) = 1$. הוכח כי H היא תת חבורה שמכילה כל מה שהיא יכולה, או ליתר דיוק, הראו כי תת חבורה שהסדר שלה מחלק את $|H|$, מוכלת ב-H.

הסיקו כי H היא תת החבורה היחידה מסדר |H|.

פתרון

תהא $K \le G$. נניח $|K|\,|\,|H|$. $H \lhd G \Rightarrow HK \le G$ כמו כן ברור כי $K \cap H$ ת"ח של H, K, G.

מכפליות האינדקס נקבל כי

$$[G:H] = [G:HK][HK:H]$$

מכאן רואים כי $[HK:H]\,|\,[G:H]$

מפני ש-$H \lhd HK$ נפעיל את איזו השני ונקבל כי $HK/_H \cong H/_{K\cap H}$. בפרט $[HK:H] = [H:H\cap K]$ ומכאן $[KH:H]\,\big|\,|K|\,\big|\,|H|$ וגם $[HK:H]\,|\,|K|$. על פי הנתון $\gcd(|H|, [G:H]) = 1$

מכאן $[HK:H] = 1 = [H:H\cap K]$.

כלומר $H \cap K = K$ והוכחנו כי $H \leq K$. מכאן אפשר להסיק כי אם $|H| = |K|$, אז $\mathrm{H} = \mathrm{K}$. כלומר H היא תת החבורה היחידה מסדר $|H|$.

מ.ש.ל.

מסקנה נחמדה מהתרגיל: לכל $x \in G$, אם $x^{|H|} = e_G$ אזי $x \in H$.

הגדרה

תהי G חבורה, אזי $Aut(G) = \{f: G \to G | \text{איזומורפיזם } f\}$ שהיא חבורת האוטומורפיזמים של G. זו חבורה ביחס לפעולת ההרכבה ואיבר היחידה בה הוא העתקת הזהות.

דוגמא

תהא G אבלית מסדר n. יהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש $(n,k) = 1$. העתקה $f: G \to G$ המוגדרת לפי $f(x) = x^k$ היא איזומורפיזם, ולכן f היא אוטומורפיזם. למשל $U_9 = \{1,2,4,5,7,8\}$, נשים לב ש $|U_9| = 6$. ולכן $x \mapsto x^5$ הוא אוטומורפיזם של U_9.

טענות (ראיתם בכיתה)

א) $Ant(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$

ב) $Ant(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$

תרגיל

הראו כי $Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

<u>הוכחה</u>:

תחילה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. כל אוטומורפיזם שולח את $(0,0)$ לעצמו ואת הקבוצה $\{a, b, c\}$ לעצמה. האוטו׳ חח״ע ועל ולכן כל אוטומורפיזם הוא למעשה <u>תמורה</u> על קבוצה $\{a, b, c\}$, כלומר בפרט $Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ היא אכן ת״ח של S_3. כמו כן כל תמורה בS_3 מגדירה אוטומורפיזם (בדקו!). מ.ש.ל. ■