מבנים אלגבריים תרגול 7 איזומורפיזמים

3 במאי 2021

הגדרה: תהיינה G_1, G_2 חבורות. הומ' ביניהן הוא פונקציה $\varphi : G_1 \to G_2$ המקיימת:

$$\forall g, h \in G_1 : \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$$

מינוחים: הומ' חח"ע נקרא גם מונומורפיזם. הומ' על נקרא אפימורפיזם. הומ' הפיך נקרא איזומורפיזם.
תרגילים:

1. מונו' שומר סדר של איבר: יהי $\varphi : G_1 \to G_2$ מונו', ויהי $g \in G_1$. הוכיחו: $o(g) = o(\varphi(g))$.
   פתרון: נסמן $o(g) = k$. כדי להראות $o(\varphi(g)) = k$ צריך להראות:
   (א) $(\varphi(g))^k = e_{G_2}$:
   $$(\varphi(g))^k = \varphi(g^k) = \varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$$
   בזה בעצם הוכחנו, שבכל הומ' הסדר של התמונה קטן או שווה לסדר של המקור: אם $f : G \to H$ הומ', ונניח $o(g) = k$ אז $o(f(g)) \leq k$.
   (ב) אם $m < k$ אז צריך להוכיח $(\varphi(g))^m \neq e_{G_2}$. מתקיים:
   $$(\varphi(g))^m = \varphi(g^m)$$
   כעת, מכיוון ש- $g^m \neq e_{G_1}$ ומחח"ע, נקבל $\varphi(g^m) \neq e_{G_2}$.
2. אפימורפיזם שומר על אבליות החבורה: יהי $\varphi : G_1 \to G_2$ הומ' על, אזי אם G_1 אבלית אז גם G_2 אבלית.
   פתרון: נניח שאכן G_1 אבלית, ונוכיח עבור G_2: יהיו $a, b \in G_2$. מכיון שההומ' על יש $g, h \in G_1$ כך ש- $\varphi(g) = a, \varphi(h) = b$. לכן:
   $$ab = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(gh) = \varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g) = ba$$

3. הוכיחו: אם $n \neq m$ אז $S_n \ncong S_m$.
פתרון: כיון ש־ $n \neq m$ אז נקבל $n! \neq m!$, ולכן $|S_n| \neq |S_m|$ ולכן אין פונקציה הפיכה ביניהן, ובפרט אין הומ' הפיך.

4. הוכיחו: $S_3 \ncong \mathbb{Z}_6$.
פתרון: הימנית אבלית, השמאלית לא. ראיתם בהרצאה שאם $\varphi : S_3 \to \mathbb{Z}_6$ איזו', אז גם $\varphi^{-1} : \mathbb{Z}_6 \to S_3$ איזו. נב"ש שיש איזו' $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to S_3$ אז בפרט הוא על, ולכן לפי תרגיל 2 כיוון ש־ $\mathbb{Z}_6$ אבלית אז גם S_3 אבלית, בסתירה.

5. האם $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$?
פתרון: לא! הימנית ציקלית והשמאלית לא. נניח בשלילה שיש $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ איזו', בפרט הוא חח"ע, ולכן $o(\varphi(1)) = 4$ כי ראינו בתרגיל 1 שהומ' חח"ע שומר סדר של איבר. אבל ב־$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ אין איבר מסדר 4, בסתירה.

6. הוכיחו: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$.
פתרון: כאשר רוצים להגדיר הומ' מחבורה ציקלית, מספיק להגיד לאן נשלח יוצר. נניח אצלנו $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle$. לכן נשלח אותו ליוצר של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, ונוודא שהכל בסדר:

$$1 \mapsto (1,1)$$

$$2 \mapsto (1,1) + (1,1) \equiv (0,2)$$

$$3 \mapsto (0,2) + (1,1) \equiv (1,0)$$

$$4 \mapsto (1,0) + (1,1) \equiv (0,1)$$

$$5 \mapsto 5(1,1) = (5,5) \equiv (1,2)$$

$$6 \mapsto 6(1,1) = (6,6) \equiv (0,0)$$

באופן כללי: בהינתן G ציקלית, H כלשהי. אז ניתן להגדיר הומ' ע"י שליחת היוצר: אם נבחר $\varphi(g) = h$ אז מתחייב

$$\varphi(g^k) = h^k$$

7. כמה הומ' יש $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$.
פתרון: מכיון ש־ $\mathbb{Z}_n$ ציקלית כל הומ' נקבע ע"י תמונת יוצר, נניח 1. נבדוק מה האפשרויות עבור $\varphi(1)$? נניח $\varphi(1) = a \in \mathbb{Z}$. מתקיים:

$$o(1) = n$$

כלומר $1 + 1 + \cdots + 1 = n \equiv 0$. לכן נידרש שיתקיים:

$$n \cdot a = a + \cdots + a = \varphi(1) + \cdots + \varphi(1) = \varphi(1 + \cdots + 1) = \varphi(0) = 0$$

בסה"כ קיבלנו $n \cdot a = 0$ ולכן $a = 0$. כלומר, יש הומ' יחיד, רק הטריוויאלי.

8. כמה הומ' יש $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$?
שוב, נגדיר הומ' לפי היוצר $1 \mapsto a \in \mathbb{Z}_n$, ולכן:

$$\forall t \in \mathbb{Z} : \varphi(t) = \varphi(t \cdot 1) = t \cdot \varphi(1) = t \cdot a(\mod n)$$

כיון שיש n אפשרויות ל־a כזה נקבל שיש n הומ'.