הפונקציה ההרמונית הצמודה

יהי $u \in C^2(\bar{\Omega})$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$ פונקציה הרמונית בתחום Ω (כלומר $u_{xx}+u_{yy}=0$ ב-Ω). נגדיר את הפונק' ההרמונית הצמודה ל-u שנסמנה v – פונקציה שמקיימת את מערכת המשוואות

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ו-} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

הערה: הפונ' v היא גם פונ' הרמונית והיא נקבעת עד כדי קבוע חיבורי (כלומר אם v צמודה ל-u אז גם $c+v$ צמודה ל-u)
- אם v צמודה ל-u אז $-u$ צמודה ל-v.

דוגמא: מצאו את הפונ' ההרמונית v הצמודה לפונ' $u(x,y)=e^x\sin y$.

פתרון: ראשית נבדוק ש-u הרמונית
$u_{xx} = e^x\sin y$ ו- $u_{yy} = -e^x\sin y$ ולכן $u_{xx}+u_{yy}=0$. הפונ' הצמודה v צריכה לקיים את המערכת

$$e^x\sin y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ו-}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\cos y$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$v(x,y) = -e^x\cos(y) + c(x)$$

ולכן

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -e^x\cos y + C'(x) = -e^x\cos y$ ולכן

$C'(x)=0$ כלומר $C(x)=C$ קבוע, ולכן קיבלנו

$V(x,y) = -e^x\cos y + C$.

בשאלה 2 נמצא את הפונק' ההרמונית הצמודה לפונ'

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + xy$$

פתרון: אם V צמודה ל-u אז $u_x = V_y$ ולכן

$V_y = 3x^2 - 3y^2 + y$ ומכאן נקבל

$V = 3yx^2 - y^3 + \frac{1}{2}y^2 + C(x)$. ידוע גם ש-

$u_y = -V_x$ ולכן $V_x = 6yx - x$. נגזור לפי x

במשוואה $V = 3yx^2 - y^3 + \frac{1}{2}y^2 + C(x)$ ונקבל

$V_x = 6yx + C'(x)$. לכן כיוון שאנו יודעים ש-

$V_x = 6yx - x$ נקבל כי $C'(x) = -x$

ולכן $C(x) = -\frac{x^2}{2}$. מכאן נקבל ש-

$$V = 3yx^2 - y^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{x^2}{2}$$

אינטגרציה של פונקציות מרוכבות: תהי f פונקציה
מרוכבת ותהי $\gamma = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ כש $a<t<b$
מסילה ב- D ואז האינטגרל של f על המסילה γ
מוגדר כ-

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

אם $f = u+iv$ אז כיוון ש- $dz = dx+idy$
אפשר לרשום גם

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i(u(x,y)dy + v(x,y)dx)$$

דוגמא: חשבו את האינטגרל $\int_C \bar{z}\,dz$ מ $z=0$
ל- $z=4+2i$ לאורך המסלול C שנתונים

א. $z=t^2+it$ $0\le t\le 2$
ב. הישר המחבר בין $z=0$ ו- $z=2i$
והישר המחבר בין $z=2i$ ו- $z=4+2i$.

פתרון

א.

$$\int_0^2 \overline{(t^2+it)}\,(t^2+it)'\,dt$$

$$= \int_0^2 (t^2-it)(2t+i)\,dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + t - it^2\,dt = \frac{2t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3}\Big|_0^2$$
$$= 10 - \frac{8i}{3}$$

שיטה נוספת לפתרון א: האינטגרל שווה-

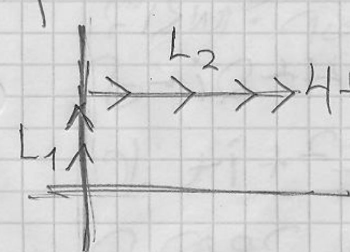
$$\int_C \overline{(x+iy)}(dx+idy) = \int_C x\,dx + y\,dy + i\int_C x\,dy - y\,dx$$

כיוון ש-$x=t^2$, $y=t$ נקבל $dx=2t\,dt$, $dy=dt$

$$= \int_0^2 2t^3\,dt + t\,dt + i\int_0^2 t^2 - 2t^2\,dt$$

$$= \frac{2t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 - i\frac{t^3}{3}\Big|_0^2 = 10 - \frac{8i}{3}$$

ב. המסלול L הוא איחוד של המסלולים L_1 ו-L_2 כפי שמופיע
לפי הציור. לקטע L_1 ניתן
לבחור פרמטריזציה ע"י $(0,t)$
כאשר $0\le t\le 2$, ולכן



$$\int_{L_1} \overline{z}\,dz = \int_0^2 \overline{it}(it)'\,dt = \int_0^2 t\,dt = 2$$

לקטע L_2 ניתן לבחור פרמטריזציה ע"י $(t,2)$ כאשר
$0\le t\le 4$ ולכן

$$\int_{L_2} \overline{z}\,dz = \int_0^4 \overline{(t+2i)}(t+2i)'\,dt = \int_0^4 t - 2i\,dt$$

$= 8-8i \Longrightarrow$ האינטגרל שווה ל- $10-8i$