

# תרגיל בית 11 – מופשטת 1

## שאלה 1

הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 אינה פשוטה.

## שאלה 2

הוכיחו כי לכל חבורה  $|G| = pq$  עבור  $p > q$  ראשוניים, אם  $p \not\equiv 1 \pmod{q}$  אזי  $G$  ציקלית.

## שאלה 3

הוכיחו שאם כל חבורות סילו של  $G$  הן נורמליות, אז היא מכפלה ישרה שלהן.

הערה: הגדרנו בכתה מתי חבורה היא מכפלה ישרה של שתי ת"ח. ההגדרה לכל מספר סופי: חבורה היא מכפלה ישרה של כמה תת-חבורות, אם כולן נורמליות, החבורה שווה למכפלה שלהן, וכל אחת מהן נחתכת באופן טריוויאלי עם המכפלה של כל האחרות.

## שאלה 4

- תהא  $G$  חבורה עם: 20,52 או 175 איברים. הוכיחו ש  $G$  לא פשוטה.
- הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.
- תהא  $G$  חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש  $G$  ציקלית.
- הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.
- הוכיחו שחבורה מסדר 42 אינה פשוטה.
- הוכיחו שחבורה מסדר 130 אינה פשוטה, ומצאו חבורה לא אבלית מסדר זה.
- תהא  $G$  חבורה. הוכיחו שלא קיימת תת חבורה  $p$ -סילו  $H$  כך ש- $[G : N_G(H)] = 2$ .
- הוכיחו שאין חבורה פשוטה מסדר 150.
- הוכיחו שחבורה מסדר  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$  היא ציקלית.

## שאלה 5

- הוכיחו: תהי  $K$  תת חבורת  $p$  סילו של  $G$ , ותהי  $H < G$ . אזי  $H \cap K$  היא תת חבורת  $p$  סילו של  $H$ .
- תנו דוגמא נגדית במקרה ש-  $H$  אינה נורמלית.

## שאלה 6

תהי  $N \triangleleft G$  ויהי  $f: G \rightarrow G/N$  ההומומורפיזם הטבעי. הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת  $p$ -סילו של  $G$ , היא תת חבורת  $p$ -סילו של  $G/N$  (שימו לב שהתמונה היא  $PN/N$ ).

## בנוס

הוכיחו שלכל חבורת סילו  $P$  מתקיים  $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ .

**בהצלחה!**