תרגיל 3

1. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה $f(x)=x^5$ רציפה במרחב המטרי $(\mathbb{Z},d_3)$.
הוכחה: נוכיח רציפות בנקודה כלשהי $a\in\mathbb{Z}$.
יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\epsilon$. יהי $x\in\mathbb{Z}$ כך ש $d_3(x,a)<\epsilon$. נשים לב ש $(f(x)-f(a))=(x^5-a^5)=(x-a)(x^4+x^3a+x^2a^2+xa^3+a^4)$. לכן, $k(x^5,a^5)\geq k(x,a)$. נובע מכך ש $d_3(x^5,a^5)\leq d_3(x,a)$. ולכן אם $d_3(x,a)<\epsilon$ אז $d_3(f(x),f(a))<\epsilon$. (וכמובן שאם $f(x)=f(a)$ אז גם מתקיים ש $d_3(f(x),f(a))=0<\epsilon$.)

2. א. הוכיחו כי במרחב מטרי (X,d), לכל $x\in X$, הקבוצה $\{x\}$ סגורה.
ב. הסיקו כי במרחב מטרי כל קבוצה סופית היא סגורה.
פתרון:
א. ניזכר בהגדרה השקולה: קבוצה A היא סגורה אמ"ם כאשר $\{x_n\}\subseteq A$, ו $x_n\to x$, אז $x\in A$. במקרה שלנו אם $\{x_n\}\subseteq\{x\}$, זה אומר שזאת סדרה קבועה על x, ולכן הגבול שלה הוא בהכרח x, וכמובן ש $x\in\{x\}$.
ב. מסקנה מסעיף א'+ הטענה מההרצאה שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

3. א. הוכיחו ש $\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ואינה סגורה ב$\mathbb{R}$.
ב. הוכיחו שהקבוצה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sin(x)+xy\leq 5\}$ סגורה ב$\mathbb{R}^2$.
ג. הוכיחו שכל מישור סגור ב$\mathbb{R}^3$.
ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של מטריצות ריבועיות עם מקדמים ממשיים. (מתייחסים אליו כאל המרחב $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריות ההפיכות, $GL_n(\mathbb{R})$, פתוחה בו.
פתרון:
א. לא פתוחה: $0\in\mathbb{Q}$, ובכל סביבה של 0, (x,y), יש איבר אי רציונלי. לכן אין אף סביבה של 0 שמוכלת ב$\mathbb{Q}$.
לא סגורה: נראה ש$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ לא פתוח באופן דומה. ניקח איבר בקבוצה, למשל $\sqrt{2}$, בכל סביבה שלו, כלומר קטע פתוח שמכיל אותו, יש איבר רציונלי.
ב. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=\sin(x)+xy$. זאת פונקציה רציפה כסכום של והרכבה של פונקציות רציפות. הקבוצה בשאלה היא בדיוק $f^{-1}(-\infty,5]$, כלומר המקור של קבוצה סגורה, ולכן קבוצה סגורה.
ג. מישור ב $\mathbb{R}^3$ הוא תת קבוצה מהצורה: כל הנקודות ב$\mathbb{R}^3$ שמקיימות משוואה לינארית מסויימת. כלומר, $A=\{(x,y,z):ax+by+cz+d=0\}$. תהי סדרת נקודות במישור $\{(x_n,y_n,z_n)\}$ כך ש $(x_n,y_n,z_n)\to(x,y,z)$. זה אומר שלכל n, $ax_n+by_n+cz_n+d=0$. כלומר, $z_n=\dfrac{-ax_n-by_n-d}{c}$ (בה"כ $c\neq 0$). נשים לב שאם $(x_n,y_n,z_n)\to(x,y,z)$ אז יש שאיפה בכל רכיב. כלומר, $z_n\to z$. ומצד שני, $z_n\to\dfrac{-ax-by-d}{c}$ מארתמטיקה

של גבולות. לכן, $z = \dfrac{-ax-by-d}{c}$, כלומר, $ax+by+cz+d=0$. נובע מכך ש $(x,y,z)\in A$.

דרך נוספת: נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$. זאת פונקציה רציפה, כפולינום. המישור A הוא בדיוק $f^{-1}(\{0\})$, כלומר, המקור של קבוצה סגורה (במרחב מטרי כל נקודון הוא סגור), ולכן A קבוצה סגורה.

ד. נשים לב שפונקציית הדטרמיננטה $\det: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$רציפה, מכיוון שהיא מורכבת מסכומים ומכפלות של הטלות. (כלומר, היא פולינום). $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, כלומר, היא המקור של קבוצה פתוחה, ולכן פתוחה.

4. תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה.
א. הוכיחו ש f רציפה אמ"ם המקור של כדור פתוח ב Y, הוא קבוצה פתוחה בX.
ב. הוכיחו שהמשפט האנלוגי עם כדורים סגורים אינו נכון.
פתרון:

א. $\Longleftarrow$: אם f רציפה ו$O\subseteq Y$ הוא כדור פתוח בY, אז בפרט הוא קבוצה פתוחה (כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה), ולכן המקור שלו הוא קבוצה פתוחה.

$\Longrightarrow$: תהי f פונקציה שמקיימת את התנאי, ונרצה להוכיח שהיא רציפה. לצורך כך צריך להוכיח שהמקור של כל קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה. תהי O קבוצה פתוחה בY. ידוע שכל קבוצה פתוחה היא איחוד של כדורים פתוחים. כלומר, $O=\bigcup B_i$. אז $f^{-1}(O)=f^{-1}(\bigcup B_i)=\bigcup f^{-1}(B_i)$. המקור של כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה, לכן זה איחוד של קבוצות פתוחות, וידוע שאיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

ב. נקח $X=Y=\mathbb{R}$, עם d המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$, וρ המטריקה הדיסקרטית. ותהי f פונקציית הזהות. f אינה רציפה, כי למשל $\{5\}$ פתוח במטריקה הדיסקרטית, אבל המקור שלו הוא $\{5\}$ שאינו פתוח במטריקה האוקלידית.

כדור סגור במטריקה הדיסקרטית יכול להיות שתי אפשרויות: עם הרדיוס ≤ 1, זה שווה לכל המרחב, ואם הרדיוס קטן מ1 זה רק הנקודון שהוא מרכז הכדור. התמונה ההפוכה של כל המרחב זה כל המרחב, שהוא כמובן סגור, והתמונה ההפוכה של נקודון זה נקודון, שהוא גם סגור (ראו שאלה 2). לכן הפונקציה מקיימת את הדרישה, אבל אינה רציפה.

5. יהי $C[0,1]$ המרחב המטרי של פונקציות רציפות מ $[0,1]$ ל $\mathbb{R}$, עם מטריקת המקסימום. (כלומר, $||f||=\max\limits_{0\leq x\leq 1}\{f(x)\}$).

א. יהי $a\in[0,1]$. הוכיחו כי פונקציית ההצבה: $F_a: C[0,1]\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י, $F_a(f)=f(a)$ היא רציפה.

ב. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה הבאה: $\{f\in C[0,1]: f(\frac{1}{3})<15\}$ פתוחה.

פתרון:

א. נוכיח שהפונקציה רציפה בכל נקודה. יהי $f\in C[0,1]$, ויהי $\epsilon>0$. נקח $\delta=\epsilon$. מתקיים: אם $g\in C[0,1]$ מקיים ש $d_{\max}(f,g)<\epsilon$, אז
$d(F_a(f),F_a(g))=|f_a(f)-F_a(g)|=|f(a)-g(a)\leq \max\limits_{0\leq x\leq 1}\{|f(x)-g(x)|\}=d_{\max}(f,g)<\epsilon$.

ב. נשים לב שהקבוצה הזאת שווה בדיוק ל $F_{\frac{1}{3}}^{-1}(-\infty,15)$, כלומר המקור של קבוצה פתוחה תחת פונקציה רציפה (לפי סעיף א'), ולכן פתוחה.

6. א. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$A\subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם A סגורה בX, אז A מרחב מטרי שלם.

ב. הראו שאם X אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש A סגורה בX, אבל A לא מרחב שלם).

ג. יהי X מרחב מטרי כלשהו, ו$A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו שA סגורה בX.

ד. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

פתרון:

א. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרת קושי. בפרט, היא סדרת קושי בX . מכיוון שX מרחב שלם, יש לה גבול. כלומר, יש $x \in X$ כך ש $x_n \to x$. לפי ההגדרה השקולה של קבוצה סגורה, נקבל ש $x \in A$. כלומר, $\{x_n\}$ מתכנסת בA.

ב. נקח $A = X$. אז A סגורה בX, אבל היא לא מרחב שלם.

ג. נניח בשלילה שA לא סגורה בX. מההגדרה השקולה לסגירות, זה אומר שיש סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ כך ש $x_n \to x$, אבל $x \notin A$. $\{x_n\}$ סדרה מתכנסת בX, ולכן היא סדרת קושי. נוכיח שאינה מתכנסת בA: אם קיים $a \in A$ כך ש $x_n \to a$, אז נכון גם במרחב X. מיחידות הגבול נקבל ש $x = a$, וזאת סתירה לכך ש $x \notin A$. לכן $\{x_n\}$ לא מתכנסת בA. כלומר, A לא מרחב שלם.

ד. הפרכה:

נקח $X = (0, 1)$ עם המטריקה הדיסקרטית (מטריקת 0-1). ונגדיר את פונקציית ההכלה $f : X \to \mathbb{R}$ (כל איבר נשלח לעצמו). זוהי פונקציה רציפה (טענת עזר: הוכיחו שכל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה). כעת, X הוא מרחב שלם (הוכחנו בכיתה שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם), אבל $(0, 1)$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$ (כלומר, עם המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$) הוא לא מרחב שלם. (לפי סעיף ג', כי הוא לא קבוצה סגורה.)