

תרגיל 7 – אינפי 1

שאלה 1

הוכיחו/הפריכו:

- א. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר.
ב. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n^2$ מתכנס.

שאלה 2

הוכיחו שטור חיובי $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

שאלה 3

חשבו את סכומי הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$
ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

רמז ל-(א): זכרו ש $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, ודעו שאם $a_n \rightarrow 1$ אזי $\ln a_n \rightarrow 0$.

שאלה 4

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נגדיר סדרה $\{b_n\}$ על ידי $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = 0$. כלומר,

$\{b_n\} = \{a_1, 0, a_2, 0, \dots\}$. הוכיחו: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; ואם הם מתכנסים, אזי

סכומם זהה.

שאלה 5

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכיחו):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{2+(-1)^n}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad .ה.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{עבור } a > 0 \text{ קבוע.} \quad .ו.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2^n} \quad .ז.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad .ח.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(2n)!} \quad .ט.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad .י.$$

בהצלחה!