מד"ר - הרצאה 5

16 באוגוסט 2011

משוואת אוילר

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_n y = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases}$$

כאשר $a_1,\, ...,\, a_n = \text{const} \in \mathbb{R}$.
נציב:

$$x = \begin{cases} e^t & x > 0 \\ -e^t & x < 0 \end{cases}$$

נניח ויש לנו משוואה מסדר 2:

$$a_0 x^2 y^{''} + a_1 x y^{'} + a_2 y = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases}$$

נסתכל על המקרה $x > 0$ ונבצע את ההצבה:

$$x = e^t,\, t = \ln x$$

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned} y^{''} &= \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \left[-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]\cdot e^{-t} \end{aligned}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} a_0 e^{2t}\left[-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]\cdot e^{-t} + a_1 e^t \cdot e^{-t}\frac{dy}{dt} + a_2 y &= \begin{cases} 0 \\ g(t) \end{cases} \\ -a_0\frac{dy}{dt} + a_0\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y &= \begin{cases} 0 \\ g(t) \end{cases} \\ a_0\frac{d^2y}{dt} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y &= \begin{cases} 0 \\ g(t) \end{cases} \end{aligned}$$

אם המשוואה הומוגנית, אנחנו יודעים לפתור, מוצאים את r_1, r_2 שפותרים את הפולינום האופייני.
נניח $r_1 \neq r_2$ ונציב:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

נציב בחזרה $t = \ln x$ ונקבל:

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

אם $r_1 = r_2$ נקבל:

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_2 t} \\ y &= c_1 x^{r_1} + c_2 \ln(x) \cdot x^{r_1} \end{aligned}$$

לכן, אם מקבלים משוואת אוילר מנחשים פתרון מהצורה

$$y = x^r$$

ומציבים. (אם מסתכלים על $x < 0$ אז נציב $y = -x^r$)

$$\begin{aligned} a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y &= 0 \\ a_0 x^2 r(r-1) x^{r-2} + a_1 x \cdot r x^{r-1} + a_2 x^r &= 0 \\ \left[a_0 r(r-1) + a_1 r + a_2\right] x^r &= 0 \\ a_0 r(r-1) + a_1 r + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

המשוואה האחרונה שקיבלנו נקראת <u>משוואה אינדיציאלית</u>. נפתור אותה ונמצא את הrים המתאימים.
אם כל השורשים שונים נקבל שהפתרון הוא

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{r_i}$$

עבור ℓ שורשים חוזרים עם ריבוי m_j (עבור שורש r_j) נקבל את הפתרון:

$$y = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{m_j} c_{ij} (\ln x)^{i-1} x^{r_j}$$

עבור שורשים מרוכבים שונים $r = \alpha \pm i\beta$:

$$y = c_1 x^{\alpha} \cos(\ln \beta x) + c_2 x^{\alpha} \sin(\ln \beta x)$$

עבור שורשים מרוכבים חוזרים

$$y = \sum_{i=1}^{m} \left[c_{1i} x^{\alpha} (\ln x)^{i-1} \cos(\ln \beta x) + c_{2i} x^{\alpha} (\ln x)^{i-1} \sin(\ln \beta x)\right]$$

דוגמה

$$x^3y^{'''}-x^2y^{''}+2xy^{'}-2y=0$$

נציב:

$$\begin{aligned} y &= x^r \\ y^{'} &= rx^{r-1} \\ y^{''} &= r\left(r-1\right)x^{r-2} \\ y^{'''} &= r\left(r-1\right)\left(r-2\right)x^{r-3} \end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} r\left(r-1\right)\left(r-2\right)-r\left(r-1\right)+2r-2 &= 0 \\ r\left(r-1\right)\left(r-2\right)-\left(r-2\right)\left(r-1\right) &= 0 \\ \left(r-1\right)\left(r-1\right)\left(r-2\right) &= 0 \end{aligned}$$

לכן השורשים הם 1 בריבוי 2 ו2 בריבוי 1, והפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא:

$$y=c_1x+c_2x\ln x+c_3x^2$$

מקרה לא הומוגני - כללים

אם יש משוואה מהצורה

$$a_0x^ny^{(n)}+...+a_ny=x^{\alpha}$$

(α קבוע).
אם α לא שורש של המשוואה האינדיציאלית ננחש:

$$y=Ax^{\alpha}$$

ונפתור עבור A.
אם α שורש בריבוי m של המשוואה אינדיציאלית אז נציב:

$$y=A\left(\ln x\right)^m x^{\alpha}$$

אם יש משוואה מהצורה:

$$a_0x^ny^{(n)}+...+a_ny=P_{\ell}\left(\ln x\right)x^{\alpha}$$

כאשר $P_{\ell}\left(\ln x\right)$ פולינום מדרגה ℓ של $\ln x$.
אם αלא שורש של המשוואה האינדיציאלית נציב

$$y=Q_{\ell}\left(\ln x\right)x^{\alpha}$$

כאשר Q_{ℓ} פולינום מדרגה ℓ עם מקדמים לא ידועים, ונמצא את המקדמים.
אם α שורש בריבוי m נציב:

$$y=\left(\ln x\right)^m Q_{\ell}\left(\ln x\right)x^{\alpha}$$

אינטגרציה של מד"ר ע"י טורי חזקות

דוגמה

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

נציב

$$\begin{aligned} y &= \sum a_i x^i = a_0+a_1x+... \\ y^{'} &= a_1+2a_2x+...=\sum i a_i x^{i-1} \end{aligned}$$

נציב במשוואה

$$\begin{aligned} a_1+2a_2x+...-2x\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right) &= 0 \\ a_1+\left(2a_2-2a_0\right)x+\left(3a_3-2a_1\right)x^2+... &= 0 \end{aligned}$$

זה שווה זהותית ל0 לכן כל מקדם שווה זהותית ל0.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 2a_2-2a_0 &= 0 \\ 3a_3-2a_1 &= 0 \\ 4a_4-2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

מכאן נקבל:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= a_0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= \frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}a_0 \end{aligned}$$

נכתוב $a_0=c$, נקבל שהפתרון הוא

$$y=c\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+...\right)$$

נסמן

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y^{'} &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) a_{\ell+1} x^{\ell} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\
\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) a_{\ell+1} x^{\ell} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m \\
a_1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell+1) a_{\ell+1} x^{\ell} &= \sum_{m=1}^{\infty} 2a_{m-1} x^m
\end{aligned}$$

אז נקבל:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
(\ell+1) a_{\ell+1} &= 2a_{\ell-1} \\
a_{\ell+1} &= \frac{2a_{\ell-1}}{\ell+1} \\
a_n &= \frac{2a_{n-2}}{n} \\
a_n &= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!!} a_0 \text{ (when n is even)} \\
&= \frac{a_0}{\left(\frac{n}{2}\right)!}
\end{aligned}$$

כאשר

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdot \ldots \cdot 4\cdot 2 & \text{n is even} \\ n(n-2)(n-4)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 1 & \text{n is odd} \end{cases}$$

המעבר הלפני אחרון הוא ע"י פתרון משוואת רקורסיה:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-2}} &= \frac{2}{n} \\
\frac{a_{n-2}}{a_{n-4}} &= \frac{2}{n-2} \\
&\vdots \\
\frac{a_2}{a_0} &= \frac{2}{2}
\end{aligned}$$

נכפיל את הכל ונקבל:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-4}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_4}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_0} &= \prod_{\substack{k<n \\ \text{k is even}}} \frac{2}{k} \\
\frac{a_n}{a_0} &= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!!}
\end{aligned}$$

לכן הטור הכללי הוא:

$$y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}=a_0e^{x^2}$$

טענה

נתונה מד"ר מהצורה:

$$y^{(n)}+p_1\left(x\right)y^{(n-1)}+...+p_n\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

כאשר $p_k\left(x\right)$, $f\left(x\right)$ רציפות בקטע $\left(a,\,b\right)$ ויהי $x_0\in\left(a,\,b\right)$.
אם כל המקדמים p_k נפתחים לטורי חזקות בתחום $\left|x-x_0\right|<\rho_k$ ו$f\left(x\right)$ נפתח לטור חזקות בתחום $\left|x-x_0\right|<\rho_{n+1}$ אזי קיים פתרון $y\left(x\right)$ של המד"ר שנפתח לטור חזקות מתכנס לפחות בתחום

$$\left|x-x_0\right|<\rho=\min_{k=1...n+1}\left\{\rho_k\right\}$$

דוגמה

$$\begin{aligned}
y^{''} &= \left(1+x^2\right)y+\sin x\\
y &= \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\\
y^{'} &= \sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}\\
y^{''} &= \sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^{k-2}
\end{aligned}$$

נציב ונקבל:

$$\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^{k-2}=\left(1+x^2\right)\sum_{k-0}^{\infty}a_kx^k+\sin x$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^{k-2} &= \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}+\sin x\\
\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+2\right)\left(\ell+1\right)a_{\ell+2}x^{\ell} &= \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+\sum_{m=2}^{\infty}a_{m+2}x^m+\sum_{\text{k is odd}}\frac{\left(-1\right)^{\frac{k-1}{2}}}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}x^k\\
\left(\ell+2\right)\left(\ell+1\right)a_{\ell+2} &= a_{\ell}+a_{\ell-2}+\frac{\left(-1\right)^{\frac{k-1}{2}}}{k!}\ \left(\text{k is odd, }\ell\geq2\right)
\end{aligned}$$

אלה נוסחאות רקורסיה, נעצור פה.

סיווג נק׳ סינגולריות

$$\begin{aligned} a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y &= 0 \\ y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y &= 0 \end{aligned}$$

אם בx_0יש נקודת סינגולריות, אזי יש לנו בעיה!
נכפיל ב$(x-x_0)^2$:

$$(x-x_0)^2 y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}(x-x_0)^2 y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}(x-x_0)^2 y = 0$$

נניח קיימים הגבולות:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)\cdot\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right) \\ L_2 &= \lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)^2\frac{a_2(x)}{a_0(x)}\right) \end{aligned}$$

אז בקרבת x_0 נקבל:

$$(x-x_0)^2 y'' + (L+o(1))(x-x_0)\,y' + (L_2+o(1))\,y = 0$$

וזה פתרון בסביבת

$$(x-x_0)^r$$

כאשר

$$g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

טור פרוביניוס Frobenius

$$y = x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r}$$

אם קיימים הגבולות L_1, L_2 אז הנק׳ x_0 נקראת סינגולרית-רגולרית.
מציבים פתרון בצורת טור פרוביניוס ופותרים עבור r והמקדמים.
(אם זה בסביבת x_0 ולא 0 נציב טור סביב x_0).

דוגמה

$$\begin{aligned} 3xy'' + (2-x)\,y' - y &= 0 \\ y'' + \frac{2-x}{3x}y' - \frac{1}{3x}y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(x\cdot\frac{2-x}{3x}\right) &= \frac{2}{3}\\ \lim_{x\to0}\left(x^2\cdot\left(-\frac{1}{3x}\right)\right) &= 0\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה בx^2:

$$x^2y^{''}+\frac{2-x}{3}\cdot xy^{'}-\frac{x}{3}y=0$$

נכתוב את המשוואה האינדיציאלית:

$$\begin{aligned}r\left(r-1\right)+\frac{2}{3}r &= 0\\ r^2-r+\frac{2}{3}r &= 0\\ r^2-\frac{r}{3} &= 0\\ r &= 0,\ \frac{1}{3}\end{aligned}$$

אז הפתרון הוא מהצורה:

$$y=x^0\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+x^{\frac{1}{3}}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$$

נפתח רק את הטור השני, כי הטור הראשון יצא טור חזקות רגיל.

$$\begin{aligned}y &= \sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+\frac{1}{3}}\\ y^{'} &= \sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)x^{k-\frac{2}{3}}\\ y^{''} &= \sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(k-\frac{2}{3}\right)x^{k-\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

נציב במשוואה המקורית:

$$\begin{aligned}
3x\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(k-\frac{2}{3}\right)x^{k-\frac{5}{3}} &+ (2-x)\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)x^{k-\frac{2}{3}}\\
&- \sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+\frac{1}{3}}=0\\
\sum_{k=0}^{\infty}3b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(k-\frac{2}{3}\right)x^{k-\frac{2}{3}} &+ \sum_{k=0}^{\infty}2b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)x^{k-\frac{2}{3}}\\
&- \sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(k+\frac{1}{3}\right)x^{k+\frac{1}{3}}\\
&- \sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+\frac{1}{3}}=0\\
\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(3\left(k-\frac{2}{3}\right)+2\right)\left(k+\frac{1}{3}\right)x^{k-\frac{2}{3}} &- \sum_{\ell=1}^{\infty}b_{\ell-1}\left(1+(\ell-1)+\frac{1}{3}\right)=0\\
\frac{b_k}{b_{k-1}} &= \frac{\left(k+\frac{1}{3}\right)}{3k\left(k+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3k}\\
b_k &= b_0\cdot\frac{1}{3^k\cdot k!}
\end{aligned}$$

במקה אחר, נניח שנקבל

$$r=\frac{1}{2},\frac{5}{2}$$

אז

$$y=x^{\frac{1}{2}}\sum a_kx^k+x^{\frac{5}{2}}\sum b_kx^k$$

כל מה שאמרנו הוא בתנאי:

$$r_1-r_2\notin\mathbb{Z}$$

אם $r_1-r_2\in\mathbb{Z}$ אז:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{r_1}\sum a_kx^k\\
y_2 &= y_1(x)\cdot\ln x+x^{r_2}\sum b_kx^k
\end{aligned}$$

כאשר $r_1\geq r_2$.