

## תזכורת.

הגדרה יהי  $M$  מרחב מטרי. העתקה  $f: M \rightarrow M$  נקראת העתקה מכווצת אם קיים מספר ממשי  $0 \leq a < 1$  כך שלכל  $x, y \in M$  מתקיים,  $d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x, y)$ . (אנחנו נקרא  $a$  "מקדם כיווץ").

הגדרה. יהי  $M$  מרחב מטרי ו- $A \subseteq M$  תת-קבוצה במרחב. אם  $A$  חסומה המספר  $diam(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$  נקרא קוטר של תת-קבוצה  $A$ . (הוא קיים כחסם עליון של קבוצה חסומה מלעיל ב- $\mathbb{R}$ ).

אם  $A$  איננה חסומה אז בהגדרה:  $diam(A) := \infty$ .

## 1. עקרון העתקות המכווצות.

משפט. יהי  $M$  מרחב מטרי קומפקטי ותהא  $f: M \rightarrow M$  העתקה מכווצת. אזי קיימת נקודת שבת של  $f$ , כלומר, קיימת  $x^* \in M$  כך ש- $f(x^*) = x^*$ .

הוכיחו את המשפט על נקודת שבת בשלבים:  
נסמן  $F_0 = M$  ו- $F_n = f(F_{n-1})$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
א' הוכיחו ש- $F_n \subseteq F_{n-1}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
ב' הוכיחו ש- $F_n$  סגורה לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
ג' הוכיחו ש- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ .  
ד' הוכיחו ש- $diam(F_n) \leq a \cdot diam(F_{n-1})$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . (כאשר  $a$  "מקדם כיווץ")  
ה' הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} diam(F_n) = 0$ .  
ו' הוכיחו שקיימת נקודה  $x^* \in M$  כך ש- $F_n = \{x^*\}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
ז' הוכיחו ש- $f(x^*) = x^*$ .

2. (קומפקטיפיקציה.) יהי  $X = \mathbb{R}^n \cup \{p\}$  כהשר  $p \notin \mathbb{R}^n$ .  
 נגדיר אוסף  $\tau$  של תת-קבוצות ב- $X$ :  

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ is open in } \mathbb{R}^n\} \cup$$

$$\{V \subseteq X \mid p \in V \wedge X - V \text{ is compact in } \mathbb{R}^n\}$$
 א' הוכיחו ש- $\tau$  טופולוגיה.  
 ב' הוכיחו ש- $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי קומפרטי.

3. להראת שטופולוגיה חזקה מטופולוגית האוסדורף היא גם טופולוגית האוסדורף.

4. להראת שבמרחב האוסדורף טופולוגיה המושרת לכל תת-מרחב סופי היא טופולוגיה דיסקרטית.

5. להראת שבמרחב האוסדורף לסדרה לא יכול להיות יותר מגבול אחד.

6. הוכיחו שמ"ט  $X$  הוא מרחב האוסדורף א"א לכל  $x \in X$  מתקיים:

$$\bigcap_{F^\circ \ni x} F = \{x\}$$

$F$ -סגורה

7. יהיה  $X$  מ"ט. הוכיחו שאם לכל  $x \neq y \in X$  קיים מרחב האוסדורף  $Y$  ופונקציה רציפה  $f$  כך ש- $f(x) \neq f(y)$ , אזי  $X$  מרחב האוסדורף.

8. יהיו  $X, Y$  מרחבים טופולוגיים,  $Y$  - מרחב האוסדורף ו- $f, g: X \rightarrow Y$  שתי פונקציות רציפות. הוכיחו שתת-קבוצה  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  סגורה.