113-88-תרגיל 4 פתרון

.1

תהיינה $B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-1&1&2&0\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\5&0&0&8\\0&-3&0&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

א) חשב את $adj(B), adj(A)$.

ב) חשב את $\det(AB)$.

פתרון:

א)

$$adj(A)=\begin{pmatrix}|A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| & -|A_{41}|\\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| & |A_{42}|\\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| & -|A_{43}|\\ -|A_{14}| & |A_{24}| & -|A_{34}| & |A_{44}|\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8\cdot(-3)\cdot 2 & -(-1)2\cdot(-1)(-1) & 1\cdot(-8) & -(-3)(-8)\\ -(-2)\cdot 10 & 2(-4) & -(-8)\cdot 4 & -(-1)\cdot 10\\ 5(-2) & -2(-2) & 2(-8) & -2(-1)\cdot(-24)\\ -5(-6) & -3\cdot 4 & -(-5)(-1)(-1) & -5(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-48 & 2 & -8 & -24\\ 20 & -8 & 32 & 10\\ -10 & 4 & -16 & -48\\ 30 & -12 & 5 & 15\end{pmatrix}$$

$$adj(B)=\begin{pmatrix}5 & -6 & 4 & -8\\ 3 & 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 3 & -6\\ 1 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

ב) כזכור $A\cdot adj(A)=|A|I$, ולכן $A\cdot adj(A)\cdot B\cdot adj(B)=|A|I\cdot|B|I=|AB|I$. נחשב את השורה הראשונה של $A\cdot adj(A)$ ואת הטור הראשון של $B\cdot adj(B)$.

$$R_1(A\cdot adj(A))=R_1(A)\cdot adj(A)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-48 & 2 & -8 & -24\\ 20 & -8 & 32 & 10\\ -10 & 4 & -16 & -48\\ 30 & -12 & 5 & 15\end{pmatrix}$$

$$=2\cdot R_1(adj(A))-R_3(adj(A))=\begin{pmatrix}-96 & 4 & -16 & -48\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10 & 4 & -16 & -48\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-86 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C_1(B\cdot adj(B))=B\cdot C_1(adj(B))=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-1&1&2&0\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$|AB| = \begin{pmatrix} -86 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -946 \Leftarrow$$

2. עבור המט' הבאות מצא: ע"ע,ו-ו"ע , במידה וA לכסינה, מצא: מט' מלכסנת P ומט' אלכסונית D וכמו כן את: A^{-1}, A^{3} ע"י שימוש בפרוק $A = PDP^{-1}$.

א. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 10) - 8 = \lambda^2 - 13\lambda + 22 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} = 11{,}2 \Rightarrow \text{לכסינה} - A$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0. \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = t, x_1 = \frac{1}{4}t \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -2t \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 155 & 294 \\ 588 & 1184 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

ב. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = -1,-2 \Rightarrow \text{לכסינה} - A$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}P^{-1}, A^3 = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1}$$

ג. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

A איננה לכסינה

ד. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1 \Rightarrow \text{לכסינה} - A$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = P\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, A^3 = P\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}p^{-1}$$

2.3 תרגיל. להלן שני ניסוחים של **משפט הליכסון**. הוכח שהם שקולים (מבלי להוכיח את המשפט):

א. תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית. T לכסינה אם ורק אם ל V יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T.

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A לכסינה אם ורק אם יש ל $\mathbb{F}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A.

פיתרון:
(הערה: אמ"מ = אם ורק אם. למה? זה מגיע מהקיצור באנגלית iff . למה iff? לא ברור אבל אימצנו)

א' גורר ב':
A לכסינה. נבחר T ה"ל כך ש A המטריצה המייצגת שלה לפי איזשהו בסיס B, אזי $[T]_B$ לכסינה. $[T]_B$ אמ"מ היא דומה למטריצה אלכסונית והמטריצה שמלכסנת אותה,P, תהווה מטריצת מעבר מהבסיס B לאיזשהו בסיס אחר C, כלומר המטריצה האלכסונית שתתקבל, D, היא המטריצה המייצגת של D לפי בסיס זה: $D = P^{-1}[T]_B P = [T]_C$, כל זאת אמ"מ T לכסינה. ע"פ סעיף א' זה קורה אמ"מ ל V בסיס וקטורים עצמיים. ע"פ האופן בו בחרנו את T, ו"ע אלו הם ו"ע של A ויהוו בסיס ל F^n.

ב' גורר א':
T לכסינה אמ"מ קיים ל V בסיס B כך שמטריצתו המייצגת, D, אלכסונית ובפרט לכסינה. לפי סעיף ב' זה קורה אמ"מ ל F^n בסיס ו"ע של D , למעשה, בגלל ש D אלכסונית בסיס זה יהיה מורכב מוקטורי הבסיס הסטנדרטי: $De_i = \lambda_i e_i$. נמצא מטריצת מעבר, P, בין הבסיס הסטנדרטי לבין הבסיס $B = \{V_1,...,V_n\}$ שנתן לנו את D ונקבל: $TV_i = P^{-1}[T]_B Pe_i = De_i = \lambda_i e_i$, ולכן בסיס B הוא בסיס ו"ע של T.

ע"מ 84 תר' 2.7:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

א. לכסן את A (כלומר מצא את הפרוק הנדרש ל D אלכסונית ו P מלכסנת)

$$\lambda_{1,2}=2,\quad \lambda_3=6$$

$$V_{\lambda_{1,2}}=sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad V_{\lambda_3}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

שימו לב לרשום את הו"ע ב P באותו סדר שהנחנו את הע"ע ב D, ואת אלו להניח בסדר ריבוי יורד

ב. חשב את A^n

$$A^n=\left(PDP^{-1}\right)^n=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)..\left(PDP^{-1}\right)=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

2.10 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&a^2\\1&4&0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

$$\left|\begin{pmatrix}x-2&0&0\\-1&x&-a^2\\-1&-4&x\end{pmatrix}\right|=(x-2)\left(x^2-4a^2\right)=(x-2)(x-2a)(x+2a)$$

אם שלושת הע"ע שונים אז כפי שהוכחנו בכיתה A וודאי לכסינה, לכן כבר בשלב זה ניתן לומר שעבור $a\neq1,-1,0$ A לכסינה.נראה מה קורה כשהיא כן שווה לאחד מהם:

$a=1$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&1\\1&4&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3}=2,-2$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&1&|0\\1&4&-2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&1&|0\\0&6&-3&0\end{pmatrix}\Rightarrow b=0.5c, a=2b-c=c-c=0\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}0\\0.5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&0&0&0\\1&2&1&|0\\1&4&2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4&0&0&0\\1&2&1&|0\\0&2&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=0, b=-0.5c\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}0\\-0.5\\1\end{pmatrix}$$

לא לכסינה

$a=-1$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&1\\1&4&0\end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

$a=0$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\\1&4&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2}=2,0$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&0&|0\\1&4&-2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&0&|0\\0&6&-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow b=\frac{1}{3}c, a=2b=\frac{2}{3}c\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&0&0&|0\\1&4&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&|0\\1&4&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=0, b=0\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

2.11-חלק שני:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{1+\sqrt{5}}\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$A^{n-2}=PD^{n-2}P^{-1}$$

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

ע"מ 87 תר' 3.13:

א. $A\in Mat_n(F)$ לכסינה. הוכח שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לנאריים ומצא גורמים אלו

A לכסינה$\Leftarrow$ A דומה למטריצה אלכסונית שערכיה העצמיים באלכסונה
הוכחנו בשעורים קודמים כי למטריצות דומות אותו פולינום אופייני ולכן הפולינום של A יהיה זהה לזה של המטריצה האלכסונית אשר הוא מהצורה $\prod(\lambda-\lambda_i)$ עבור כל λ_i איבר על אלכסונה.

ב. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א?

$$\begin{vmatrix}x&-1\\0&x\end{vmatrix}=x^2$$

$$A-0I=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=t,x_2=0\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

כלומר אין מספיק ו"ע לליכסון A. לא סותר כיוון שכיוון הגרירה הפוך