

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^3}{\sin^2(x) + x^2}$ ב. $g(x) = e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ ג. $h(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

2. פתרו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx$ ב. $\int \ln(x^2 - x - 6) dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} dx$

3. נביט בפונקציה $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

א. הוכיחו כי $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2}$ (רמז: כפל בצמוד)

ב. מצאו את המקסימום של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[1, \infty)$. האם יש לה מינימום?

4. תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ב \mathbb{R} , המקיימת $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (0, 2)$ עבורה $f'(c) = 0$.

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה $d \in (0, 2)$ עבורה $f''(d) < 0$.

5. נביט בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

א. עבור איזה ערך של a הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$? הוכיחו שהיא אכן גזירה אז.

ב. האם $f'(x)$ רציפה ב $x = 0$?