R	חוג
$R[\lambda]$	חוג הפולינומים

הגדרה

יהי R חוג(עם יחידה).

- $R((x)) = \left\{\sum\limits_{i=-n}^{\infty} a_i x^i \middle| a_i \in R\right\}$ ־ טורי לורן מעל חוג R
- $R[[x]] = \left\{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i \middle| a_i \in R\right\}$ ־ טורי חזקות פורמליים מעל R

חיבור ־ ברור. כפל:

$$\left(\sum_{i=-n}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=-m}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j} = \sum_k \left(\underbrace{\sum_{i+j=k} a_i b_j}_{\text{finite}}\right) x^k$$

לכל k, מכיוון שi,j חסומים מלמטה, יש מספר סופי של צירופים של i,j כך ש$i+j=k$, ולכן המקדמים של x^k סופיים. לו היינו מנסים להגדיר את הטורים $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i$, לא היינו יכולים להכפיל אותם, כי היינו מקבלים סכומים אינסופיים במקדמים.

תזכורת

נניח שR תחום. כל איבר הפיך ב$R[x]$ הוא סקלר הפיך.

הגדרה

$$\nu : R((x)) \to \mathbb{Z}$$

$$\nu\left(\sum a_i x^i\right) = \min_i \{a_i \neq 0\}$$

$$\nu\left(2x + 4x^2 + \sum_{i=3}^{\infty} i! \cdot x^i\right) = 1$$

$$\nu\left(x^{-2} + x^{-1} + x^7\right) = -2$$

$$\{f \in R((x)) | \nu(f) \geq 0\} = R[[x]]$$

הערה

$$\nu\left(fg\right)=\nu\left(f\right)+\nu\left(g\right)$$

$$\left[\nu\left(f+g\right)\geq\min\left(\nu\left(t\right),\nu\left(g\right)\right)\right]$$

מסקנה

אם R תחום, גם $R\left(\left(x\right)\right)$ תחום, ולכן גם $R\left[\left[x\right]\right]$ תחום.

הערה

נניח ש$g_0,g_1,g_2,...\in R\left[\left[x\right]\right]$. אזי $\sum\limits_{i=0}^{\infty}x^ig_i$ מוגדר היטב, משום שהמקדם של x^n בביטוי הנ"ל שווה למקדם של x^n בביטוי $\sum\limits_{i=0}^{n}x^ig_i$.

טענה

לכל $f\in R\left[\left[x\right]\right]$, $1-xf$ הפיך.

$$\left[\left(1-xf\right)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(xf\right)^i=\sum_{i=0}^{\infty}x^if^i\right]$$

הוכחה

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^if^i\right)\left(1-xf\right)=\sum_{i=0}^{\infty}x^if^i-\sum_{i=0}^{\infty}x^{i+1}f^{i+1}=1$$

מסקנה

נניח שD חוג עם חילוק(כל האיברים חוץ מ0 הפיכים). אז גם $D\left(\left(x\right)\right)$ חוג עם חילוק.

הוכחה

נוכיח שכל איבר f של $D\left[\left[x\right]\right]$ עם $\nu\left(f\right)=0$ הוא הפיך.

$$f=\overbrace{a_0}^{\neq0}+a_1x+a_2x^2+...=a_0\left(1+a_0^{-1}a_1x+a_0^{-1}a_2x^2+...\right)$$

a_0 הפיך בD. לפי הטענה, גם $\left(1+a_0^{-1}a_1x+a_0^{-1}a_2x^2+...\right)$ הפיך. לכן f הפיך.

הערה

האיבר הכללי בחוג $D\left[\left[x\right]\right]$ נראה כך:

$$f=a_{n}x^{n}+a_{n+1}x^{n+1}+...=a_{n}x^{n}\left(1+x\left(...\right)\right)$$

זה לא הפיך כי a_n ו$\left(1+x\left(...\right)\right)$ הפיכים, אבל x^n לא הפיך.
באופן דומה, לאיבר הכללי של $D\left(\left(\right)\right)$יש אותה צורה בדיוק, פרט לזה שn עשוי להיות שלילי. אבל - $x^{-1}\in D\left(\left(x\right)\right)$ לפי ההגדרה ולכן כל איבר של $D\left(\left(x\right)\right)$ הפיך.

מסקנה

אם $\mathbb{F}$ שדה, אז גם $\mathbb{F}\left(\left(x\right)\right)$ שדה. (כי אם R קומוטטיבי אז גם $R\left(\left(x\right)\right)$ קומוטטיביות)

דוגמה

נסתכל על שתי הבניות של פולינומים כפולים:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Q}\left[\left[x\right]\right]\left(\left(y\right)\right) & & \mathbb{Q}\left(\left(y\right)\right)\left[\left[x\right]\right]\\ || & & ||\\ \left\{ \sum\limits_{j=-n}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_{ij}x^{i}\right)y^{j}\right\} & \subseteq & \left\{ \sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=-n_{i}}^{\infty}a_{ij}y^{j}\right)x^{i}\right\} \end{array}$$

החוגים שונים כי, למשל $\sum\limits_{i=-\infty}^{0}x^{-i}y^{i}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}y^{-i}x^{i}$ נמצא באגף ימין אבל לא באגף שמאל

1.1.113 מכפלה ישרה של חוגים

נתונה משפחה של חוגים $\left\{ R_{\lambda}|\lambda\in\Lambda\right\}$.
המכפלה הישרה היא החוג

$$\prod R_{\lambda}=\left\{ f:\Lambda\to\bigcup R_{\lambda}\middle|\forall_{\lambda\in\Lambda}f\left(\lambda\right)\in R_{\lambda}\right\}$$

במקרה הסופי מקבלים וקטורים.

הגדרת הפעולות

$$\left(f+g\right)\left(\lambda\right)=f\left(\lambda\right)+g\left(\lambda\right)$$

$$\left(f\cdot g\right)\left(\lambda\right)=f\left(\lambda\right)\cdot g\left(\lambda\right)$$

$$\left(0_{\prod R_\lambda}\right)(\lambda)=0_{R_\lambda}$$

$$\left(1_{\prod R_\lambda}\right)(\lambda)=1_{R_\lambda}$$

דוגמאות

- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ - זוגות מ$\mathbb{Z}$
- $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ - סדרות עם מקדמים ב$\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_6\times M_2\left((\mathbb{R})\right)$
- $\{1,2,3\}\to\cup R_i$:

$$\{(f(1),f(2),f(3))|f(\lambda)\in R_\lambda\}$$

דוגמה פרטית:

$$\prod R_2=\left\{f:\{1,2\}\to\bigcup R_\lambda\middle|\forall_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)\in R_\lambda\right\}$$

אידאלים

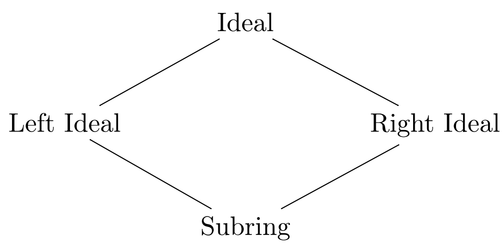
יהי R חוג.

- אידאל שמאלי הוא תת חבורה $L\leq(R,+)$ כך ש$\forall_{a\in L}\forall_{x\in R}xa\in L$.

איך לזכור: $\boxed{RL\subseteq L}$

- אידאל ימני: $A\leq(R,+)$ כך ש$\forall_{a\in A}\forall_{x\in R}ax\in A$

אם I אידאל שמאלי וימני הוא נקרא אידאל.



דוגמה

$$R=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\middle|a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$$

$$L=\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa & xb\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in L$$

כנ"ל מימין - לכן L אידאל. לעומת זאת:

$$A=\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax & ay\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן A אינו אידאל

סימון

- $S\leq R$ - תת חוג
- $L\leq_L R$ - אידאל שמאלי
- $L\leq_R R$ - אידאל ימני
- $I\lhd R$ - אידאל

$$\{0\}=0\lhd R$$

R חוג כלשהו, $a\in R$
$Ra=\{xa|x\in R\}$ "אידיאל ראשי"

הערה R עצמו מקיים את האקסיומות של אידיאלים אבל בד"כ אינו נחשב לאידיאל.

יהי L אידיאל שמאלי. אם $1\in L$, $L=R$ (כי $\forall_x x\cdot 1\in L$)

מסקנה

יהי $L \neq R$ אידיאל שמאלי, אז אין בL אף איבר הפיך משמאל.

$$\forall_{\substack{a\in L\\ a\in R}} xa \in L$$

בפרט אפשר לבחור $a=1$

נניח ש$1 \in L$

$$\forall_{x\in R} x = x\cdot 1 \in L$$

פעולות

ראינו שהחיתוך של משפחה של תת־חוגים הוא תת־חוג.

- חיתוך משפחה של אידיאלים שמאליים הוא אידיאל שמאלי:

דוגמה

$$R = M_2\left(\mathbb{C}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} * & 0\\ * & 0\end{pmatrix} \leq_R R$$

$$A = \begin{pmatrix} * & *\\ 0 & 0\end{pmatrix} \leq_L R$$

$$L\cap A = \begin{pmatrix} * & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

לא אידאל דו צדדי! כי ביצענו חיתוך של אידאל שמאלי עם אידאל ימני.

- תהי $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ שרשרת בת מניה של אידאלים. אז $\bigcup I_n \lhd R$[1]

$$\forall_{a\in\bigcup I_n} \exists_m a \in I_m$$

$$\forall_x xa, ax \in I_m \subseteq \bigcup I_n$$

חיבור אידאלים

$$I_1 + I_2 = \left\{ a_1 + a_2 \middle| \begin{array}{c} a_1 \in I_1\\ a_2 \in I_2\end{array} \right\}$$

[1]איחוד זה לא בהכרח תת חוג. אם זה מוכל - אז כן