החלפת משתנים

במקרה ונרצה להחליף את המשתנים שלנו x,y במשתנים אחרים u,v, נרשום את x וy כפונקציות של u וv, כלומר

$$y=y\left(u,v\right)$$

$$x=x\left(u,v\right)$$

בנוסף נניח שהאינטגרל הוא בתחום D. אז:

אם $x,y\in C^{1}\left(D\right)$ וכן $J=\begin{vmatrix}x'_{u} & x'_{v}\\ y'_{u} & y'_{v}\end{vmatrix}\neq0$ בD(כמובן שf צריכה להיות אינטגר-בילית) וx וy מעתיקות את D על D' בצורה חח"ע, אז מתקיים

$$\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\left|J\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

תנאי המשפט יכולים להתקיים בD פרט לקבוצת נקודות בעלת מידה 0(כלומר שטחה 0)

דוגמה 1

חשבו את האינטגרל

$$\iint\limits_{D}\sin\left(\sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

בתחום $D=\left\{x^{2}+y^{2}\leq1\right\}$

פתרון

מכיון שהתחום הנתון הוא מעגל מתבקש לעבור לקואורדינטות פולריות.

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

במקרה שלנו

$$D=\left\{x^{2}+y^{2}\leq1\right\}=\left\{r^{2}\cos^{2}\theta+r^{2}\sin^{2}\theta\leq1\right\}=\left\{r^{2}\leq1\right\}=\left\{0\leq r\leq1\right\}$$

(r לא יכול להיות קטן מאפס בהצגה פולרית)

נשאר לדאוג כי הפונקציות x וy יהיו חח"ע(בשביל שתנאי המשפט יתקיימו) ולכן נדרוש $0\leq\theta<2\pi$. כלומר נגדיר את D' להיות

$$D'=\left\{0\leq r\leq1,0\leq\theta<2\pi\right\}$$

כעת נחשב את היעקוביאן:

$$J=\begin{vmatrix}x'_r & x'_\theta\\ y'_r & y'_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r\neq 0$$

(לבקשת קנטרוביץ אין צורך להוכיח במבחן)
נקבל כי

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\left(\sin\sqrt{\left(r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2}\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\iint\limits_{D'} r\left(\sin r\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r\sin r\right)\,\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left(\left[-r\cos\theta\right]_0^1+\int_0^1\cos\theta\,\mathrm{d}r\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\cos\theta+\sin 1\right)\,\mathrm{d}\theta=\left[-\sin\theta+\theta\sin 1\right]_0^{2\pi}=$$

$$=2\pi\sin 1$$

דוגמה 2

נתון האינטגרל $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}y$. עברו לקורדינטות פולריון ושנו סדר אינטגרציה.

פתרון

I נחליף לקודינטות פולריות.
את $x\in r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

נתון $0\le x\le 2\Leftarrow 0\le r\cos\theta\le 2\Leftarrow 0\le r\le\dfrac{2}{\cos\theta}$ (נוסיף כי התחום הוא $(0,2$)
נראה בהמשך שאכן ניתן לחלק ב$\cos\theta$
עבור y נשים לב שמתקיים $x\le y\le\sqrt{3}x$. נחלק לשתי משוואות ע"י "וגם":

1. $x\le y\Leftarrow r\cos\theta\le r\sin\theta\Leftarrow\tan\theta\ge 1\Leftarrow\theta\ge\dfrac{\pi}{4}$ (נשים לב שכאן דורשים גם $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$.
2. $y\le\sqrt{3x}\Leftarrow r\sin\theta\le\sqrt{3}r\cos\theta\Leftarrow\tan\theta\le\sqrt{3}\Leftarrow\theta\le\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

נקבל כי

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

ולכן קיבלנו

כלומר האינטגרל הכפול לאחר מעבר לקואורדינטות קוטביות הוא

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\cdot r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

II ביקשו שנחליף סדר אינטגרציה:
נצייר את התחום המבוקש. נזכיר שבקורדינטות קוטביות "r" מייצג את הרדיוס ו"θ" מייצגת את הזוית.
נעזר בתחום המקורים: $\begin{matrix} x \le y \le \sqrt{3}x \\ 0 \le x \le 2 \end{matrix}$

מצאנו כי $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. רוצים להחליף סדר אינטגרציה ולכן במקום שθ יהיה קבוע מבקשים שr קבוע.
ידוע כי $0 \le r \le \frac{2}{\cos\theta}$. על ידי הצבה של θ $4 = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{3}}$, $\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} =$

$\frac{4}{\sqrt{12}} = 2\sqrt{2}$

בתחום א': $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ו$0 \le r \le 2\sqrt{2}$

בתחום ב': $2\sqrt{2} \le r \le 4$.

נשים לב שבתחום ב' הרדיוס הקטן ביותר הוא $2\sqrt{2}$ והגדול ביותר הוא 4.
הזווית הגדולה ביותר היא $\frac{\pi}{3}$. כעת ידוע ש$r \ge \frac{2}{\cos\theta} \Leftarrow \theta \ge \arccos\left(\frac{2}{r}\right)$
ולכן האינטגרל הוא הבא:

$$I = I_{(\text{א})} + I_{(\text{ב})} = \int_0^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(r)\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \int_{2\sqrt{2}}^{4} \int_{\arccos\left(\frac{2}{r}\right)}^{\frac{\pi}{4}} f(r)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

דוגמה

חשבו $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ כאשר D חסום ע"י הקווים $x+y=1, x=0, y=0$.

פתרון

נציב $u=x+y$, $v=x-y$. קל לפרש את x וy $\begin{matrix} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{matrix}$. נראה את היעקוביאן:

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

נשאר לקבוע את גבולות האינטגרציה.

- עבור $u=x+y$:
  $x=0 \Leftarrow 2x=0 \Leftarrow (x+y)+(x-y) \Leftarrow u+v=0 \Leftarrow$ נקבל גבול אינטגרציה $u=-v$.
- באופן דומה עבור $y=0$:
  $\Leftarrow 2y=0 \Leftarrow (x+y)-(x-y)=0 \Leftarrow u-v=0 \Leftarrow u=v$

ע"כ נפתור את האינטגרל הבא:

$$I=-\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u \int_{-u}^{u} \cos\left(\frac{v}{u}\right)\,\mathrm{d}v$$

ברור שהאינטגרל הוא ידוע כי u קבוע. המשיכו לבד!

דוגמה

חשב את השטח של האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$

פתרון

שטח של גוף גיאומטרי הוא האינטגרל של הפונקציה $f(x,y)=1$. ז"א צריך לעשות $\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. במקרה שלנו $D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$

במקרה זה נעשה קורדינטות קוטביות. נשים לב שמדובר על אליפסה ולכן נתייחס לכל מוקד עם רדיוס נפרד.

ידוע שכל מוקד הוא לכל היותר a וb/אם נבחר $0\leq r\leq 1$ ההצבה הבאה:

$$x=ar\cos\theta$$

$$y=br\sin\theta$$

נעשה יעקוביאן:

$$J=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\sin\beta \end{vmatrix}=abr\neq 0$$

ולכן האינטגרל המבוקש

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} abr\,\mathrm{d}\theta$$

אינטגרל משולש

נפתור באופן דומה לאינטגרל כפול

דוגמה

חשבו $\iiint\limits_V x^3y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ עבור $V = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \\ 0 \le z \le xy \end{array} \right\}$

פתרון

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^{xy} x^3y^2z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \left[x^3y^2\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x\cdot y} =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{x^5y^4}{2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^5y^5}{10}\right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\mathrm{d}x = \frac{1}{110}$$