אלגברה מופשטת 3 – תרגול 12

פולינומים מדרגה 3

תרגיל: יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ מתוקן מדרגה 3, בעל שורשים u,v,w ודיסקרימיננטה D, אזי $\mathbb{Q}(u,v,w)=\mathbb{Q}(u,\sqrt{D})$.

פתרון:

נסמן $E=\mathbb{Q}(u,v,w), K=\mathbb{Q}(u,\sqrt{D})$

ברור ש $\sqrt{D}\in E$ ולכן $K\subseteq E$.

מצד שני נסמן $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-u}=(x-v)(x-w)\in K[x]$ כלומר $v+w\in K$.

מתקיים גם $g(u)=(u-v)(u-w)\in K$ ולכן $v-w=\pm\dfrac{\sqrt{D}}{g(u)}\in K$. לכן $v,w\in K$ וסיימנו.

מסקנה: יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ מדרגה 3 אי-פריק, ו E שדה הפיצול שלו.

אזי $\sqrt{D}\in\mathbb{Q}$ אם ורק אם $Gal(E/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_3$. (שימו לב ש $\sqrt{D}\in\mathbb{Q}(u)\Rightarrow\sqrt{D}\in\mathbb{Q}$).

זה שקול ל:

$\sqrt{D}\notin\mathbb{Q}$ אם ורק אם $Gal(E/\mathbb{Q})\cong S_3$.

זכרו גם ש $D<0$ אם ורק אם קיים שורש מרוכב, ובמקרה זה $Gal(E/\mathbb{Q})\cong S_3$.

משפט: הדיסקרימיננטה של $f(x)=x^3+qx+r\in\mathbb{Q}[x]$ היא $D=-4q^3-27r^2$.

תרגיל: חשבו את חבורת גלואה של הפולינום $f(x)=x^3-9x+9$.

פתרון: הפולינום אי-פריק (בדקו).

הדיסקרימיננטה היא 3^6 (בדקו), ולכן החבורה היא $\mathbb{Z}_3$.

שאלה: מה אם הפולינום אינו מהצורה $f(x)=x^3+qx+r$? "מצמצמים" אותו: אם $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

אזי $f(x-\frac{a}{3})$ הוא מהצורה הרצויה (והוא בעל אותה חבורת גלואה, ואותה דיסקרימיננטה).

תרגיל: הוכיחו או הפריכו: הרחבת גלואה שחבורת הגלואה שלה פתירה היא הרחבה רדיקלית.

פתרון: נפריך. ניקח $f(x)=x^3-3x+1\in\mathbb{Q}[x]$.

הפולינום אי-פריק (בדקו).

הדיסקימיננטה של $f(x)$ היא 81 (בדקו).

$\sqrt{D}\in\mathbb{Q}$ ולכן חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}_3$.

נסמן ב E את שדה הפיצול של הפולינום, ונניח בשלילה שהוא הרחבה רדיקלית.

נשים לב ש E הרחבה ממשית, כי כל שרשי $f(x)$ ממשיים.

כיוון ש $[E:\mathbb{Q}]=3$, אזי E הרחבה שורשית. כלומר מתקיים $E=\mathbb{Q}(a)$ כך ש $a^n\in\mathbb{Q}$.

יהי $g(x)$ הפולינום המינימלי של a, אזי $g(x)\mid x^n-a^n$, ובנוסף $g(x)$ פולינום מדרגה 3 שכל שרשיו ממשיים (כי $g(x)$ מתפצל ב E). אבל ידוע שהשורשים של x^n-a^n הם $\rho_n^i a$, ויש רק שני שרשי יחידה ממשיים, סתירה.

פולינומים מדרגה 4

יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ פולינום אי-פריק מדרגה 4, ויהי E שדה הפיצול שלו, ונסמן $G=Gal(E/\mathbb{Q})$.
$G\le S_4$ ת"ח טרנזיטיבית, ומתקיים $4\,|\,|G|$. ידוע גם ש $V\lhd S_4$ ולכן $G\cap V\lhd G$.
לכן יש לנו שדה ביניים שהוא הרחבת גלואה: $E^{G\cap V}$.
מתקיים $[E^{G\cap V}:\mathbb{Q}]=[G:G\cap V]=[GV:V]$ (השיויון הימני הוא לפי איזו' 2).
מתקיים $[GV:V]\,|\,[S_4:V]=6$.
אם ידוע $m=[E^{G\cap V}:\mathbb{Q}]$ אזי ניתן לדעת כמעט בדיוק מיהי החבורה G.

משפט:

א. אם $m=6$ אזי $G\cong S_4$.
ב. אם $m=3$ אזי $G\cong A_4$.
ג. אם $m=1$ אזי $G\cong V$.
ד. אם $m=2$ אזי $G\cong D_4$ או $G\cong\mathbb{Z}_4$.

משפט:

אם $r_1,\ldots,r_4$ הם השורשים של $f(x)$ אזי $E^{G\cap V}$ הוא שדה הפיצול של $g(x)=(x-u)(x-v)(x-w)\in\mathbb{Q}[x]$ (**הרזולוונט הקובי**), כאשר

$$u=(r_1+r_2)(r_3+r_4)$$
$$v=(r_1+r_3)(r_2+r_4)$$
$$w=(r_1+r_4)(r_2+r_3)$$

אם $f(x)=x^4+qx^2+rx+s$ אזי מתקיים $g(x)=x^3-2qx^2+(q^2-4s)x-r^2$.

אם הפולינום כללי אזי מצמצמים ע"י $f(x-\frac{a}{4})$ כאשר a הוא המקדם של x^3.

תרגיל: מהי חבורת גלואה של $f(x)=x^4-4x+2$?

פתרון: הפולינום אי-פריק (בדקו). הרזולוונט הוא $g(x)=x^3-8x+16$ והוא אי-פריק (בדקו). הדיסקרימיננטה שלילית (בדקו) ולכן חבורת הגלואה של $g(x)$ היא S_3 ולכן חבורת גלואה של $f(x)$ היא S_4.

תרגיל: מהי חבורת גלואה של $f(x)=x^4-10x^2+1$?

פתרון: הפולינום אי-פריק (בדקו). הרזולוונט הוא $g(x)=x^3+20x^2+96x=x(x+8)(x+12)$. לכן $m=1$ וחבורת גלואה של $f(x)$ היא V.