1. האם המשפט ההפוך למשפט הערך הממוצע של לגרנז' נכון? הוכח/הפרך: לכל פונקציה גזירה f ולכל $c\in\mathbb{R}$ קיימות נקודות $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $c\in(a,b)$ ו $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

פתרון

הפרכה. $f(x)=x^3$ גזירה ועבור $c=0$ לא קיימות $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $c=0\in(a,b)$ ו- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0=f'(0)$. אכן, $f(x)=x^3$ חח"ע ולכן אם $a\neq b$ אז $f(a)\neq f(b)$ ולכן $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\neq 0$. אפשר למצוא דוגמאות נגדיות דומות באמצעות נקודות פיתול.

2. תהי f גזירה $3\le n$ פעמים ב a ומקיימת $f^{(2)}(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ ו $f^{(n)}(a)\neq 0$.
הוכח: n אי זוגי אם"ם a נקודת פיתול.

הוכחה

נקבל ממשפט טיילור $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f^{(n)}(a)(x-a)^n+r(x)$ כאשר $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{r(x)}{(x-a)^n}=0$. משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה a היא $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$. נקבל מהנ"ל $\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}=f^{(n)}(a)+\dfrac{r(x)}{(x-a)^n}$.

מכיון ש $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{r(x)}{(x-a)^n}=0$ ו $f^{(n)}(a)\neq 0$ קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f^{(n)}(a)+\dfrac{r(x)}{(x-a)^n}$ ו- $f^{(n)}(a)$ שווי סימן. כלומר, קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}$ חיובי תמיד או שקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}$ שלילי תמיד.

כעת, אם n זוגי $(x-a)^n$ בהכרח חיובי עבור $x\neq a$. לכן בסביבה המנוקבת של a הנ"ל $f(x)-g(x)$ חיובי ואז הפונקציה קמורה ב- a או שבסביבה המנוקבת של a הנ"ל $f(x)-g(x)$ חיובי ואז הפונקציה קעורה ב- a. בכל מקרה נסיק שבמצב זה a אינה נקודת פיתול.

אם n אי זוגי נקבל שקיימת סביבה ימנית של a שבה $f(x)-g(x)$ חיובי וסביבה שמאלית שבה $f(x)-g(x)$ שלילי או בדיוק ההיפך ובכל מקרה במצב זה a נקודת פיתול.