פתרון תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. (א) לא נכון. $f(z)=z^4$ היא דוגמא נגדית.

(ב) על עיגול היחידה $\{z \mid |z|\leq 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z|\leq 1$ מתקיים $|f(z)|\leq M$ אבל לכל $z\in\mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}|\leq 1$ ואז

$$|f(z)|] = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \cdots = |f(\frac{z}{3^n})| \leq M$$

ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

2. מספיק להוכיח שלכל z_0 מתקיים $f^{n+1}(z_0)=0$. לפי משפט קושי, לכל $R>0$ מתקיים

$$f^{n+1}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\mathrm{d}z$$

לפי משפט של חסם לאיטגרל

$$\begin{aligned}|f^{n+1}(z_0)| &= |\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\mathrm{d}z| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\frac{M|z|^n}{R^{n+2}}2\pi R \leq (n+1)!\frac{M(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}}\end{aligned}$$

אם נשאיף את R לאינסוף , הביטוי הימני ישאף ל 0 ולכן $f^{n+1}(z_0)=0$ כנדרש.

3. נגדיר $g(z)=f(z)-f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן $g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z)-f(2z)=c$. אם נציב $z=0$ נגלה ש $c=0$ ולכן $f(z)=f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 1ב.

4. נעזר בנוסחת קושי הדמר, $R^{-1}=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$

א. רדיוס ההתכנסות מקיים $R=1\Rightarrow 1=\limsup\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=R^{-1}$, והמרכז הוא בנקודה $-i$. על שפת העיגול נוכל לרשום $z+i=e^{i\theta}$ עבור θ ממשי. ואז הטור בערכים מוחלטים הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in\theta}}{(n+1)(n+2)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ שמתכנס. מכאן שעל השפה יש התכנסות בהחלט, ובפרט התכנסות. לסיכום, תחום ההתכנסות הוא $\{z\in\mathbb{C}:|z+i|\le 1\}$.

ב. נציב $w=\frac{z+1}{z-1}$ בטור, ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}w^n$. במונחים של w רדיוס ההתכנסות מקיים $R=3\Rightarrow\frac{1}{3}=\limsup\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}}=R^{-1}$. גם כאן ניתן לבדוק ולראות שיש התכנסות (בהחלט) על השפה. ולכן תחום ההתכנסות הוא $\{|w|\le 3\}$. נפשט קצת את תחום ההתכנסות:

$$|w|\le 3\Leftrightarrow\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\le 3\Leftrightarrow\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2\le 9\Leftrightarrow|z+1|^2\le 9|z-1|^2\Leftrightarrow|z|^2+2\operatorname{Re}z+1\le 9|z|^2-18\operatorname{Re}z+9$$

$$\Leftrightarrow 8|z|^2-20\operatorname{Re}z+8\ge 0\Leftrightarrow 8x^2+8y^2-20x+8\ge 0\Leftrightarrow 8\left(x-\frac{20}{16}\right)^2-8\left(\frac{20}{16}\right)^2+8y^2+8\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2\ge\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

מדובר במשלים של העיגול הפתוח, שמרכזו בנקודה $\left(\frac{5}{4},0\right)$ ורדיוסו באורך $\frac{3}{4}$ יחידות.

ג. נחלק למקרים:

1) $|z|>1$: במקרה זה האיבר הכללי של הטור, בערך מוחלט הוא

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right| \geq \frac{\left|1-|z|^n\right|}{1+|z|^n} = \frac{|z|^n-1}{1+|z|^n} \to 1 \neq 0$$

ולכן אין התכנסות (ע"פ התנאי ההכרחי להתכנסות טורים).

השתמשנו כאן באי שווין המשולש במכנה, ובי שוויון המשולש ההפוך במונה.

2) $|z|<1$: במקרה זה האיבר הכללי של הטור בערך מוחלט הוא

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right| \geq \frac{\left|1-|z|^n\right|}{1+|z|^n} = \frac{1-|z|^n}{1+|z|^n} \to 1 \neq 0$$

ושוב אין התכנסות.

ד. נציב $w=z^3-i$ ונקבל $\sum_{n=0}^{\infty} n!w^n$. במונחים של w רדיוס ההתכנסות הוא אפס. ולכן יש התכנסות עבור $z^3=i \Leftrightarrow z^3-i=0 \Leftrightarrow w=0 \Leftrightarrow |w|=0$. כלומר התכנסות בשלוש נקודות בלבד,

$$z_1=-i, z_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$$

5. א) $z^2\sin z$ סביב $z=0$. היות שידוע ש

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ברור שהטור שאנחנו מחפשים הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

ב) נציב $w=z-\frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהיה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\begin{aligned}(w+\frac{\pi}{2})^2\sin(w+\frac{\pi}{2}) &= (w+\frac{\pi}{2})^2\cos(w)\\ &= w^2\cos(w)+\pi w\cos w+\frac{\pi^2}{4}\cos w\end{aligned}$$

היות שהפיתוח של $\cos w$ הוא

$$\cos w=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n+2}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi\frac{w^{2n+1}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^2}{4}\frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi\frac{w^{2n+1}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^2}{4}\frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

כאשר

$$a_k=\begin{cases}\frac{\pi(-1)^n}{(2n)!} & k=2n+1\\ (-1)^n(\frac{\pi^2}{4(2n)!}-\frac{1}{(2n-2)!}) & k=2n\quad k\neq 0\\ \frac{\pi^2}{4} & k=0\end{cases}$$

ג. נשים לב ש

$$\frac{1}{9+z^4}=\frac{1}{9}\frac{1}{1-(-(\frac{z}{\sqrt{3}})^4)}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{\sqrt{3}}^4)^n=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^n}z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9(\sqrt{3})^n}z^{4n+1}$$